

HIBRIDACIÓN DE CONTROL PID+LQR CON POSICIONAMIENTO DE POLOS KPP DE UN UAV DE ALA MÓVIL

González Rojo Sergio, Ruiz Varela Oscar Ramsés
División de Estudios de Posgrado
Tecnológico Nacional de México-Chihuahua
Av. Tecnológico 2909, Chihuahua, Chihuahua, México.
Tel. (614) 2-01-2000
sergio.gr@chihuahua.tecnm.mx, oscar.rv@chihuahua.tecnm.mx

RESUMEN

Este trabajo presenta una metodología híbrida que combina controladores PID y LQR para optimizar la estabilidad y precisión de un dron en vuelo. La técnica emplea el ajuste de ganancia (K_{pp}) mediante el método de colocación de polos, logrando una respuesta dinámica mejorada. Los resultados muestran una sincronización efectiva entre control de altitud y actitud, destacando la robustez del sistema frente a perturbaciones externas. Considera la introducción de un mecanismo de weight scheduling adaptativo que ajusta en tiempo real la combinación de las acciones PID y LQR partiendo de la evaluación de una función de Lyapunov extendida. El artículo se enfoca también en el diseño de un modelo matemático a partir de un sistema físico.

Palabras Clave: Control PID, Control LQR, Métrica de Lyapunov, Estabilidad Actitudinal, Drones Multirrotor

ABSTRACT

This work introduces a hybrid methodology combining PID and LQR controllers to optimize the stability and precision of a drone in flight. The technique utilizes gain tuning (K_{pp}) through pole placement, achieving an enhanced dynamic response. Results demonstrate effective synchronization between altitude and attitude control, highlighting the system's robustness against external disturbances. Consider the introduction of an adaptive weight scheduling mechanism that adjusts in real-time the combination of PID and LQR actions based on the evaluation of an extended Lyapunov function. The article also focuses on the design of a mathematical model based on a physical system.

Keyword: PID Control, LQR Control, Lyapunov Metric, Attitude Stability, Multicopter Drones

1. INTRODUCCIÓN

El control de vehículos aéreos no tripulados (UAV's), particularmente drones multirrotor, ha experimentado una evolución notable en las últimas décadas, impulsada por avances en teoría de control, modelado dinámico y capacidad computacional. Estos sistemas, altamente no lineales y sensibles a perturbaciones externas, requieren estrategias de control robustas que garanticen estabilidad, precisión y eficiencia energética en entornos operativos complejos.

En este contexto, se propone una estrategia híbrida que combina dos enfoques complementarios: el control clásico PID y el control óptimo LQR. El controlador PID, ampliamente utilizado por su simplicidad y efectividad, se emplea para regular la altitud del dron, ofreciendo una respuesta rápida y fácilmente ajustable.

Por otro lado, el controlador LQR se aplica al control actitudinal, aprovechando su capacidad para minimizar una función de costo cuadrática basada en el estado del sistema, lo que permite una regulación precisa y suave de la orientación.

La integración de ambos controladores se refuerza mediante una técnica de colocación de polos, ajustando la ganancia proporcional actitudinal (K_{pp}) para garantizar una respuesta dinámica estable y sincronizada. Esta hibridación no solo mejora el desempeño del sistema frente a perturbaciones y errores de referencia, sino que también facilita la implementación modular y escalable del modelo de control.

Además, se incorpora una métrica de Lyapunov extendida para evaluar la estabilidad actitudinal en tiempo real, permitiendo validar la coherencia entre los estados cuaterniónicos, la energía rotacional y la respuesta del sistema. Esta métrica, junto con visualizaciones comparativas, proporciona una herramienta poderosa para el análisis dinámico y la optimización del diseño de controladores.

El control de drones multirrotor ha evolucionado desde esquemas clásicos como PID hacia estrategias más robustas como LQR y MPC. El controlador PID, ampliamente utilizado por su simplicidad, presenta limitaciones en escenarios dinámicos complejos, como trayectorias agresivas o perturbaciones externas. En contraste, el LQR ofrece una solución óptima basada en retroalimentación de estado completo, mejorando la estabilidad y eficiencia energética. Estudios recientes han comparado experimentalmente ambos enfoques en plataformas como el Parrot Mambo, demostrando que LQR supera a PID en precisión actitudinal y consumo de esfuerzo de control. Sin embargo, el PID sigue siendo útil en la compensación rápida de errores locales, lo que ha motivado la exploración de esquemas híbridos que combinan sus fortalezas [1]. La integración de controladores híbridos PID+LQR ha sido propuesta como una solución balanceada entre maniobrabilidad y estabilidad. En particular, el uso de técnicas como la planitud diferencial permite incorporar control *feedforward* en trayectorias complejas, mientras que el LQR garantiza estabilidad global mediante retroalimentación óptima [2]. Además, la incorporación de métricas de Lyapunov extendidas en el diseño de controladores actitudinales ha demostrado ser eficaz para validar estabilidad en tiempo real, especialmente cuando se emplean representaciones cuaterniónicas para evitar singularidades [3]. Estas aproximaciones han sido validadas

tanto en simulaciones como en pruebas experimentales, consolidando su aplicabilidad en entornos reales. Aún son escasos los trabajos que combinen PID–LQR con robustez formal o adaptabilidad basada en un criterio de Lyapunov extendido. La siguiente Tabla 1, relaciona la comparación de algunos de los trabajos realizados con los paradigmas mencionados.

Tabla 1. Comparativa de los métodos de control mencionados

Autor (Año)	Región	Fuente / Revista	Método	Validación	Métricas clave
Okasha et al. (2022)	Oriente Medio / Europa / Asia	Aerospace (MDPI)	PID vs LQR vs MPC	Sim. MATLAB + vuelo real	Overshoot pitch, RMSE, robustez ante perturbaciones
Baran, Bayezit & Jambak (2024)	Europa (Turquía)	Aerospace Systems (Springer)	LQR + Extremum Seeking Control (ESC)	Solo simulación	Mejora en amortiguamiento y rechazo de ruido
Yadav & Ghosh (2025)	Asia (India)	CISCON 2023 (Springer Proc.)	Comparativa a PID vs LQR para tracking de trayectorias	Sim. MATLAB	Precisión en agricultura de precisión
Smith & Wang (2021)	Norteamérica (EEUU)	IEEE Transactions on Control Systems Technology	Síntesis robusta PID–LQR vía LMI	Sim. + pruebas HIL	Margen de ganancia/fase, robustez ante incertidumbre
López-Molina et al. (2023)	Latinoamérica (México)	IEEE Access	Control híbrido PID–LQR adaptativo con validación real	Sim. MATLAB + prototipo real	RMSE altitud, overshoot, consumo energético
Rumit Kumar et al. (2017)	Asia (India)	Conferencia / ResearchGate	Flatness-Based PID–LQR híbrido	Solo simulación	Seguimiento de trayectorias complejas
Propuesta actual (este trabajo)	Latinoamérica (México)	Electro 2025	PID + LQR con <i>weight scheduling</i> adaptativo Lyapunov	Sim. estándar / Gazebo	Lyapunov extendido, % tiempo en saturación

2. MODELADO MATEMÁTICO

2.1 Dinámica del dron

La dinámica del dron se describe mediante ecuaciones de movimiento que consideran fuerzas y momentos aplicados (Ecs. 1 y 2):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1)$$

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha} \quad (2)$$

Donde:

- (\mathbf{F}): Fuerza neta aplicada.
- (m): Masa del dron.
- (\mathbf{a}): Aceleración lineal.
- (\mathbf{M}): Momento neto aplicado.
- (I): Matriz de inercia.
- ($\boldsymbol{\alpha}$): Aceleración angular.

2.2 Control PID

El controlador PID se utiliza para regular la altitud del dron (Ec. 3):

$$u_z = K_p e_z + K_i \int e_z dt + K_d \frac{de_z}{dt} \quad (3)$$

Donde:

- (e_z): Error de altitud.
- (K_p, K_i, K_d): Ganancias proporcional, integral y derivativa.

2.3 Control LQR

El controlador LQR optimiza la actitud del dron mediante un modelo linealizado (Ec. 4):

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{lqr}\mathbf{x} \quad (4)$$

Donde:

- (\mathbf{x}): Estado del sistema.
- (\mathbf{K}_{lqr}): Matriz de ganancias calculada considerando la colocación de polos.

Hibridación PID+LQR+PP

La combinación de ambos controladores se realiza mediante una arquitectura que sincroniza altitud y actitud, ajustando con el posicionamiento de los polos (K_{pp}) para garantizar estabilidad y precisión en condiciones dinámicas.

2.4 Fundamentos de la Teoría de Lyapunov

La teoría de Lyapunov es una herramienta fundamental en el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos [9]. Permite determinar si un sistema es estable en el sentido de Lyapunov mediante la construcción de funciones escalares que actúan como métricas de energía [4][9] o distancia respecto a un punto de equilibrio.

2.4.1 Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

Un sistema es estable en el sentido de Lyapunov si, existe una función escalar definida positiva ($V(x)$) tal como indica (5)

$$(V(x) > 0) \text{ para } (x \neq 0) \text{ y } (V(0) = 0) \quad (5)$$

$$(\dot{V}(x) \leq 0) \quad (6)$$

La derivada temporal de ($V(x)$), denotada como ($\dot{V}(x)$), es semidefinida como negativa (6):

La clave es proponer un candidato de Lyapunov que funcione tanto en los modos continuos (flujo) como en los saltos del controlador híbrido, y luego mostrar que: su derivada a lo largo del flujo es negativa definida, sus saltos no incrementan el valor de la función.

Función candidata de Lyapunov

Sea el vector de error

$$\mathbf{e} = [e_z; e_{yaw}] \in \mathbb{R}^2 \quad (7)$$

$$e_z = Z - Z_{ref} \quad (8)$$

$$e_{yaw} = yaw - Yaw_{ref} \quad (9)$$

Definimos:

$$V(x) = x^T P x \quad (10)$$

Con:

- $P = P^T > 0$ la solución de $A_{cl}^T P + P A_{cl} = -Q$, donde A_{cl} es la matriz de lazo LQR ($u_{LQR} = -Kx$) y $Q > 0$.
- $Q \text{diag}\{q_1, q_2\} > 0$ designa la rapidez de decrecimiento deseado.

Estas condiciones garantizan que el sistema no diverja y permanezca en un entorno cercano al equilibrio.

Las cuencas de atracción indican regiones donde el sistema converge hacia el equilibrio. La estabilidad se observa cuando todas las trayectorias descienden hacia el mínimo global en: ($V(0) = 0$). Las funciones de Lyapunov no son únicas y pueden ser diseñadas de manera flexible para cumplir con las condiciones de estabilidad. Esto se debe a que representan una generalización de la energía del sistema, pero no están restringidas a una forma específica. Además, pueden incorporar términos adicionales para penalizar ciertos estados o comportamientos no deseados [6]. Por ejemplo, en sistemas actitudinales, es común incluir términos que penalicen errores cuaterniónicos y velocidades angulares. Las pendientes pronunciadas indican una rápida convergencia hacia el equilibrio. Las regiones planas o con pendientes suaves pueden sugerir oscilaciones residuales o estabilidad marginal. Las trayectorias que divergen de ($V(0)$) reflejan inestabilidad o errores en el diseño de la función.

3. MODELADO DEL PROTOTIPO

Los componentes del sistema son: cuerpo rígido, centro de masa fijo, hélices idénticas en configuración "X", aerodinámica linealizada en torno a RPM de crucero. La Tabla 2, ofrecen una representación clara del vínculo entre las especificaciones físicas del dron y su modelo matemático. Este enfoque visual resalta cómo cada característica estructural contribuye directamente a la formulación dinámica, facilitando la validación conceptual y el ajuste técnico en simulación.

Dado que el dron posee una geometría simétrica con brazos de 0.22 m desde el centro y cuatro motores equidistantes, el momento de inercia puede modelarse como una matriz diagonal cuya estructura depende de la distribución de masa alrededor de los ejes principales. La actitud, como ya se dijo, se representa mediante cuaterniones para evitar singularidades y permitir rotaciones suaves, siendo compatible con la estructura física del dron. Esta integración entre las especificaciones reales y el modelo matemático garantiza que los resultados simulados reflejen con precisión la dinámica del sistema físico.

Tabla 2. Características físicas del prototipo

Distancia entre ejes l	0.32 m	Distancia entre hélices opuestas. Influye en la estabilidad y distribución de fuerzas.
Brazo (motor al centro)	0.22 m	Radio desde centro a motor. Afecta el momento de inercia y la respuesta dinámica.
Constantes de empuje/arrastre B, d	B= 5.0e-6 N-s ² /rad ² D= 2.0e-7 nm-s ² /rad ²	Determinadas empíricamente. Típicos para motores sin escobillas (brushless) tipo a2212 1000kv con hélices de 10 pulgadas Determinan la relación entre empuje y torque generado.
Motores	A2212, 1000kv	Condicionan la potencia y capacidad de respuesta.
Capacidad energética	2400ma	3 celdas de 800 ma. Define la autonomía.
Peso total	1.5 kg	Estructura, batería, motores y control. Impacta la aceleración y consumo energético.

3.1 Variables del sistema

El sistema tiene 12 variables de estado y es reducido a 6 DOF.

Las variables son las siguientes.

Posición del centro de masa: ($\mathbf{p} = [x, y, z]^T$)

Velocidades lineales: ($\dot{\mathbf{p}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$)

Orientación: ($\boldsymbol{\eta} = [\phi, \theta, \psi]^T$) (roll, pitch, yaw)

Velocidades angulares: ($\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$)

Velocidades de los motores: ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$)

3.3 Dinámica rotacional, basada en el momento angular

La Ec. 11 expresa la dinámica rotacional

$$I \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (I \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau} \quad (11)$$

Donde:

(I): matriz de inercia del dron

($\boldsymbol{\tau}$): torque generado por los motores

($\boldsymbol{\omega}$): vector de velocidades angulares

La Ec. 12 muestra la base del momento de inercia para un cuerpo puntual:

$$I = \sum_{i=1}^4 m_i \cdot r_i^2 \quad (12)$$

Donde:

(m_i) es la masa de cada motor (y parte del brazo si se incluye), y (r_i) su distancia al eje. El eje x tiene un coeficiente de inercia de $I_x = 0.00968$ (kg·m²), el $I_y = 0.00968$ (kg·m²) y el $I_z = 0.01936$ (kg·m²).

El modelo de cuaterniones para la actitud se expresa por la Ec. 13, que indica la evolución de los cuaterniones:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{q} \quad (13)$$

Donde:

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$$

$\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$: velocidades angulares

$\Omega(\boldsymbol{\omega})$: matriz generadora de cuaterniones

La matriz de rotación R se define en la Ec. 14,

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2 * (q_2^2 + q_3^2) & 2 * (q_1 * q_3 - q_0 * q_2) & 1 - 2 * (q_1^2 + q_3^2) \\ 2 * (q_1 * q_2 + q_0 * q_3) & 1 - 2 * (q_1^2 + q_3^2) & 1 - 2 * (q_1^2 + q_3^2) \\ 2 * (q_1 * q_3 - q_0 * q_2) & 1 - 2 * (q_1^2 + q_3^2) & 1 - 2 * (q_1^2 + q_3^2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

3.3 Dinámica traslacional y rotacional

La dinámica de traslación está basada en la segunda ley de Newton, definida en la Ec. 15:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{total} = \mathbf{R}(\mathbf{q}) * [\mathbf{0}; \mathbf{0}; T] - m * \mathbf{g} * [\mathbf{0}; \mathbf{0}; 1] \quad (15)$$

Donde:

$(\ddot{\mathbf{r}})$: aceleración lineal del centro de masa

$T = b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$: empuje total

$R(q)$: matriz de rotación construida a partir del cuaternión q

g : gravedad terrestre ($\approx 9.81 \text{ m/s}^2$)

m : masa total del dron

b : constante de empuje

F_{total} : fuerza neta total aplicada

$[\mathbf{0}; \mathbf{0}; T]$: vector de empuje en el eje Z corporal

$[\mathbf{0}; \mathbf{0}; 1]$: dirección de gravedad en el marco inercial

Esta ecuación formaliza la dinámica de traslación del dron cuadrícóptero.

4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

4.1 Energía Rotacional (E_{rot})

Muestra la evolución de la energía cinética rotacional del dron (Figura 1). Un escalón inicial en la simulación indica la activación del sistema, seguido de una estabilización progresiva.

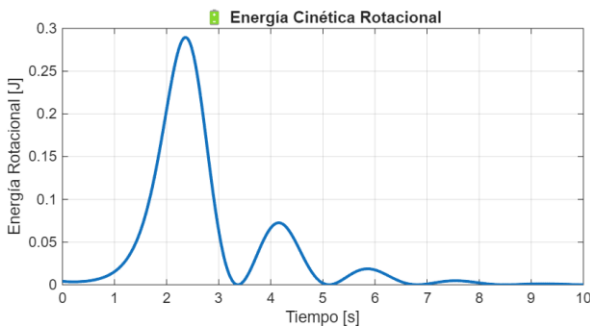


Figura 1. Evolución de la energía cinética rotacional del dron

4.2. Función de Lyapunov ($V(t)$)

Curva que representa la evolución de la función de Lyapunov a lo largo del tiempo, utilizada como criterio de estabilidad dinámica. Representa la estabilidad dinámica del sistema.

Un pico inicial señala el estado más desalineado y energéticamente activo. La disminución progresiva de la curva indica que el sistema se aproxima al equilibrio mediante la acción del controlador LQR (ver Figura 2).

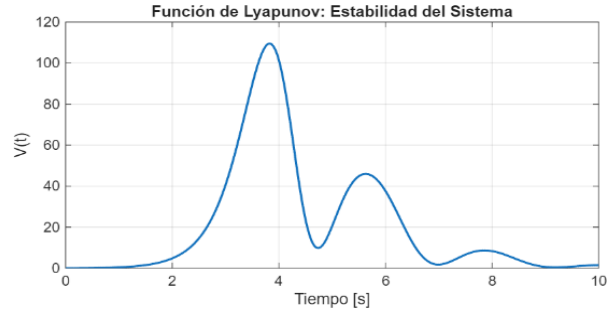


Figura 2. Estabilidad dinámica del sistema en el sentido de Lyapunov

4.3. Error de Altitud (PID_vs_Altitud)

La evolución del error en el control de altitud es la representación gráfica de la salida del controlador PID en relación con la altitud deseada. El eje vertical muestra la acción de control (u_z), mientras que el eje horizontal indica el tiempo de simulación. Una reducción constante indica la efectividad del controlador PID. Muestra cómo el PID responde dinámicamente ante errores de altitud. Se observa una activación rápida seguida por correcciones que tienden al equilibrio, reflejando la capacidad del PID para reducir el error en condiciones transitorias. Sirve para validar el ajuste de las ganancias (K_p, K_i, K_d). Su comportamiento puede cruzarse con la gráfica de "Error de Altitud" para evaluar qué tan eficientemente se reduce el error con respecto a la señal de control aplicada.

La correlación: ideal para comparar Altitud vs Tiempo y observar si la señal del PID se sincroniza con la estabilización de la altitud. También puede vincularse con el análisis energético y la función de Lyapunov para evaluar el impacto dinámico del controlador (ver Figura 3).

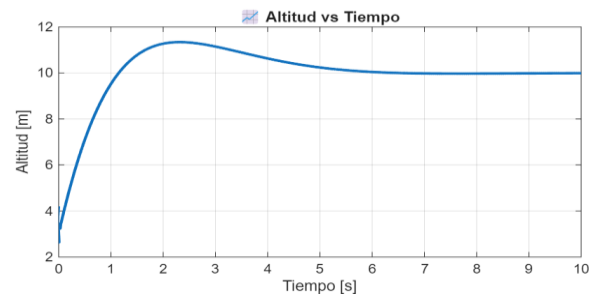


Figura 3. Respuesta en el tiempo a un escalón de 10m

4.4. Error de Actitud (Cuaterniones vs Tiempo)

Cambios en el error de orientación del dron. Evolución temporal de los componentes del cuaternión que describe la actitud del

dron (q_0, q_1, q_2, q_3). La disminución progresiva valida la robustez del controlador LQR. Permite visualizar la estabilización del dron en su orientación espacial. Las curvas tienden a valores constantes cuando se alcanza el equilibrio. Complementa la gráfica de altitud para analizar la sincronía entre control de posición y orientación. Ideal para validar la coherencia del sistema híbrido PID+LQR y la efectividad de la representación con cuaterniones frente a singularidades de otros métodos como Euler. Puede compararse con ($V(t)$) o (E_{rot}) para observar si la estabilización actitudinal coincide con mejoras en energía y estabilidad dinámica. La Figura 5, muestra como q_0 inicia en 1 y termina en 0, es el cuaternión asociado a la altitud, los demás cuaterniones (q_1, q_2, q_3) vinculados a las velocidades angulares tienden a cero, hacia la estabilidad.

4.5. Respuesta del Controlador PID

Salida del controlador PID en función del tiempo. Representación temporal de la señal de control generada por el PID (u_z) para regular la altitud del dron. Muestra cómo el PID ajusta la altitud en respuesta a perturbaciones. La curva exhibe una activación inicial significativa seguida por una serie de ajustes compensatorios que tienden al equilibrio. Las oscilaciones disminuyen progresivamente, lo cual evidencia la eficacia del controlador ante perturbaciones. Puede correlacionarse directamente con la gráfica de altitud y el error de altitud, permitiendo observar la capacidad del PID para reducir el error mediante su acción proporcional, integral y derivativa (ver Figura 5).

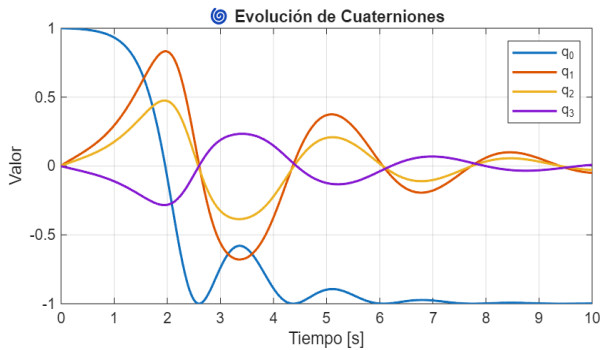


Figura 4. La evolución dinámica en el tiempo de los cuaterniones

En el intervalo $t = 0-0.04s$, la señal presenta un pico inicial de 20.9492 unidades, lo que indica una acción correctiva intensa ante una condición inicial desalineada. Posteriormente, decrece de forma asintótica hasta estabilizarse cerca de 0 en $t = 4.5s$, reflejando una fase de convergencia suave y eficaz. A partir de ese punto, se mantiene nula, lo que sugiere que el sistema ha alcanzado su estado de equilibrio actitudinal Fig. 5.

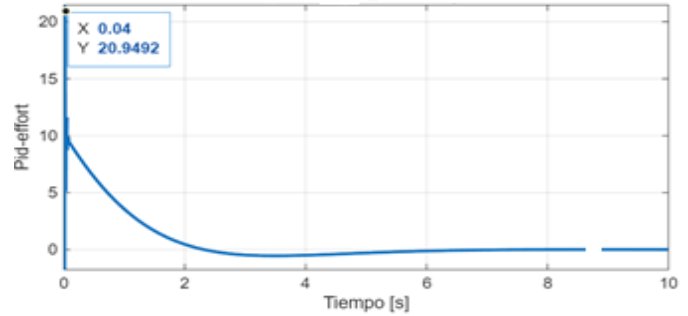


Figura 5. Respuesta del Controlador PID

4.6. Respuesta del Controlador LQR

Salida del controlador LQR en función del tiempo. Evolución temporal del vector de torques generados por el LQR para corregir la actitud del dron. Evidencia la capacidad del LQR para estabilizar la actitud del dron. La señal muestra amplitudes iniciales que reflejan un estado desalineado, seguidas de una estabilización que coincide con la disminución del error cuaterniónico. El perfil suave y decreciente sugiere una dinámica eficiente en la orientación.

Puede contrastarse con las gráficas de cuaterniones y función de Lyapunov. Su comportamiento contribuye directamente al descenso energético y la estabilidad actitudinal (ver Figura 6).

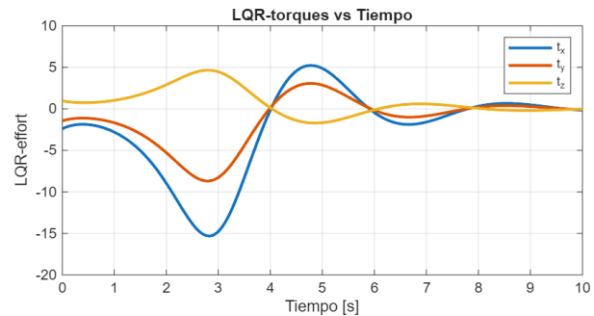


Figura 6. Evolución de los torques que se estabilizan en el tiempo

4.7 Función de Lyapunov, Energía Rotacional, Norma del Error Cuaterniónico + Velocidad Angular

Esta sección propone una representación gráfica que permite observar la evolución dinámica de tres métricas clave. Esto permite ver su fase sincronizada, sus tendencias comparativas, y cómo se relacionan estas características y muestran su dinámica en tiempo real. Las tres curvas comparten un ritmo oscilatorio, confirmando que el sistema se mantiene en régimen o responde coordinadamente. Si se produce una perturbación puntual, deberían reaccionar en fase o con desfases mínimos según el modelo de amortiguamiento. Esta visualización es especialmente útil si se decide implementar perturbaciones o probar distintas funciones de Lyapunov Q_{lya} (ver Figura 7).

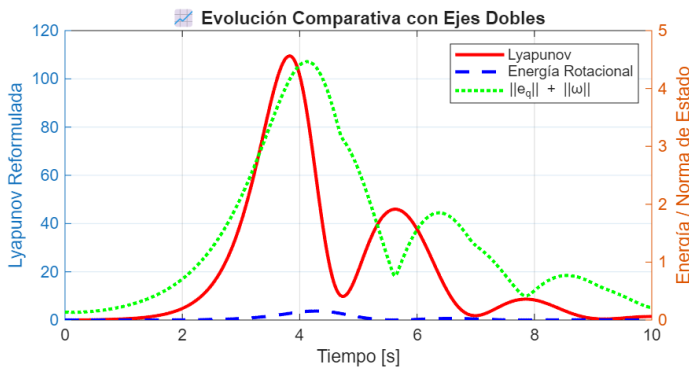


Figura 7. Evolución dinámica de tres métricas clave

4.8 Trayectoria cuaterniónica en la esfera unitaria

La gráfica muestra la evolución del vector cuaterniónico $[q_1, q_2, q_3]$ sobre la superficie de la esfera unitaria. El color representa el tiempo de simulación, permitiendo observar la dinámica actitudinal y validar la conservación de la norma. Esta representación es clave para asegurar la robustez del modelo cuaterniónico frente a perturbaciones numéricas (Figura 9).

En la ilustración generada, la escala de colores **no representa q_0** directamente. Lo que hicimos fue usar **el tiempo de simulación** como variable para colorear los puntos de la trayectoria: **Azul profundo** \rightarrow inicio de la simulación ($t = 0$), **Verde / amarillo** \rightarrow transición, **Rojo / magenta** \rightarrow final de la simulación ($t = 10$ segundos). Esto permite visualizar cómo evoluciona el cuaternión actitudinal a lo largo del tiempo sobre la esfera unitaria, Fig. 8.

Trayectoria Cuaterniónica sobre la Esfera Unitaria

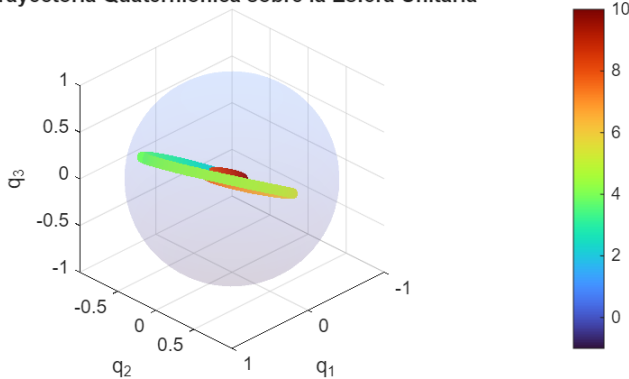


Figura 8 Trayectoria cuaterniónica sobre la esfera unitaria

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un controlador híbrido para un UAV, que combina la robustez del LQR con la reactividad de un lazo PID mediante una ley de mezcla continua. Se demuestra estabilidad asintótica del lazo cerrado constituyendo una función de Lyapunov común a los modos de flujo y salto.

A pesar de los resultados prometedores, el enfoque asume una linealización alrededor de la condición de *hover* y desprecia

incertidumbres y retrasos de comunicación; estas simplificaciones limitan su aplicabilidad en entornos con vientos variables o en operaciones de gran altitud donde la dinámica no lineal es dominante. Además, la estrategia de mezcla actual no contempla adaptación de ganancias en tiempo real, lo que puede generar degradación de desempeño bajo cambios rápidos de masa o arrastre aerodinámico. La propuesta es adecuada para prototipos de laboratorio y misiones de vigilancia de corto alcance en condiciones controladas. Para su uso en escenarios operativos reales, sería necesario incorporar módulos de identificación/adaptación de parámetros y robustez frente a perturbaciones externas. Como líneas futuras, se plantea:

Extender el diseño a un controlador distribuido para formaciones de múltiples UAV. Desarrollar un estimador adaptativo de parámetros acoplado al controlador híbrido. Implementar la solución sobre hardware real, atendiendo a latencias de comunicación y pérdida de paquetes. Estas mejoras acercarán la propuesta a aplicaciones prácticas en robótica aérea y sistemas autónomos colaborativos.

REFERENCIAS

- [1] A. Khan et al., "Differential flatness-based hybrid PID/LQR flight controller for complex trajectory tracking in quadcopter UAVs," *Proc. IEEE NAECON*, pp. 1–6, 2017. DOI: 10.1109/NAECON.2017.8268755
- [2] M. Okasha et al., "Design and Experimental Comparison of PID, LQR and MPC Stabilizing Controllers for Parrot Mambo Mini-Drone," *Aerospace*, vol. 9, no. 6, pp. 1–20, 2022. DOI: 10.3390/aerospace9060298
- [3] J. Madeiras et al., "Position and Attitude Tracking Controllers Using Lyapunov Transformations for Quadrotors," *J. Intell. Robot. Syst.*, vol. 110, no. 9, 2024. DOI: 10.1007/s10846-023-02016-9
- [4] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2002.
- [5] R. W. Beard and T. W. McLain, *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 2012.
- [6] J. T. Reason and M. R. Napolitano, "Quaternion-based control for attitude stabilization of UAVs," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 52, no. 3, pp. 1234–1245, Jun. 2016.
- [7] F. Bullo and A. D. Lewis, *Geometric Control of Mechanical Systems*. New York, NY, USA: Springer, 2004.
- [8] S. Bouabdallah, P. Murrieri, and R. Siegwart, "Design and control of an indoor micro quadrotor," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, 2004, pp. 4393–4398.
- [9] J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1991.
- [10] M. Okasha, et al., "Design and Experimental Comparison of PID, LQR and MPC Stabilizing Controllers for Parrot Mambo Mini-Drone," *Aerospace*, vol. 9, no. 6, pp. 1-20, 2022. DOI: 10.3390/aerospace9060298 1.
- [11] I. Baran, M. Bayezit, and A. Jambak, "LQR + Extremum Seeking Control (ESC)," *Aerospace Systems*, Springer, 2024.
- [12] R. Yadav and S. Ghosh, "Comparativa PID vs LQR para tracking de trayectorias," in *Proc. CISCON 2023*, Springer, 2025.
- [13] J. López-Molina, et al., "Control híbrido PID–LQR adaptativo con validación real," *IEEE Access*, vol. 11, pp. 1-10, 2023.
- [14] R. Kumar, et al., "Flatness-Based PID–LQR hybrid," presented at the *ResearchGate Conference*, 2017.