

OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN POR MEDIO DE UN ALGORITMO DE BALLENA

Elsa T. Rodríguez López¹, Juan Fernando García Mejía¹, Everardo Efrén Granda Gutiérrez¹, Pedro Enrique Lizola Margolis², Yenit Martínez Garduño³, José Antonio García Mejía¹

¹Universidad Autónoma del Estado de México
Centro Universitario UAEM Atlacomulco
Cerro de Coatepec

Email: etrodriguezl@uaemex.mx, fgarciam@uaemex.mx, eegrandag@uaemex, jagarciame@uaemex.mx

²Universidad Autónoma del Estado de México
Facultad de Contaduría y Administración
Cerro de Coatepec

Email: plmargolis@uaemex.mx

³Universidad Autónoma del Estado de México
Instituto de Estudios Sobre la Universidad
Cerro de Coatepec

Email: ymartinezg@uaemex.mx

RESUMEN

En este trabajo se muestra el proceso investigativo del tipo experimental que tiene como finalidad determinar si un algoritmo metaheurístico basado en inteligencia de enjambre denominado Algoritmo de Optimización de Ballena, es mejor que un Algoritmo Genético para construir un portafolio de inversión óptimo, el cual es una colección de activos financieros que tiene como finalidad generar ganancias económicas con mínimo riesgo. Un Algoritmo de Optimización de Ballena es una técnica que se inspira en el comportamiento depredador de las ballenas jorobadas, las cuales capturan su alimento a partir de cercar cardúmenes de peces a partir de espirales de burbujas. A partir del tratamiento estadístico de los resultados de los algoritmos, que se programaron en el lenguaje R, se encontraron varias ventajas del Algoritmo de Optimización de Ballena sobre un Algoritmo Genético.

Palabras Clave: algoritmo metaheurístico, portafolio de inversión indicaciones, Algoritmo de Optimización de Ballena

ABSTRACT

This paper shows the research process of the experimental type that aims to determine if a metaheuristic algorithm based on swarm intelligence called the Whale Optimization Algorithm, is better than a Genetic Algorithm to build an optimal investment portfolio, which is a collection of financial assets that aims to generate economic gains with minimal risk. A Whale Optimization Algorithm is a technique that is inspired by the predatory behavior of humpback whales, which capture their food by enclosing schools of fish from spiral bubbles. From the statistical treatment of the results of the algorithms, which were programmed in the R language, several advantages of the Whale Optimization Algorithm over a Genetic Algorithm were found.

Keywords: metaheuristic algorithm, investment portfolio indications, Whale Optimization Algorithm

1. INTRODUCCIÓN

Una función matemática es una expresión simbólica que suele representar realidades complejas de fenómenos físicos, químicos eléctricos y, como se emplea en este artículo, de fenómenos económico-administrativos, en específico la relación existente entre la ganancia y el riesgo de pérdida de capital que implica la inversión en activos financieros. Estos últimos se definen como una colección de intangibles que otorgan a su propietario derecho sobre ingresos futuros de una empresa (deuda privada), entidad gubernamental (deuda pública), materias primas, metales, divisas y criptomonedas por citar algunos ejemplos [1]. Un modelo matemático de la relación existente entre la ganancia y el riesgo de inversión en activos financieros tiene como finalidad encontrar los montos a invertir en cada activo para reducir el riesgo de pérdida y maximizar, en lo posible, la ganancia (rendimiento) en una ventana de tiempo determinado. Uno de los primeros modelos y, actualmente el más usado, es el “Modelo del Portafolio Óptimo” desarrollado por el economista americano ganador de El Premio de Ciencias Económicas del Banco de Suecia en Memoria de Alfred Nobel en su edición 1990, Harry Markowitz [2].

El modelo de Markowitz implica dos expresiones matemáticas, la primera, mostrada en la ecuación 1, donde se aprecia la ganancia que se obtiene en invertir una determinada cantidad en una colección de activos financieros que se denomina Portofolio de inversión.

$$\bar{r}_p = \bar{r}_1 * w_1 + \bar{r}_2 * w_2 \dots + \bar{r}_n * w_n = \sum_{n=1}^N \bar{r}_n * w_n \quad (1)$$

Donde $\bar{r}_p$ se refiere al rendimiento promedio del portafolio de inversión, $\bar{r}_n$ es el rendimiento esperado del n -ésimo activo financiero, w_n es el peso del activo financiero; en otras palabras,

la proporción de capital que se invierte en el n -ésimo activo que representa el número total de activos financieros.

La segunda expresión del modelo de Markowitz expresa el riesgo de pérdida al invertir en una determinada colección de activos financieros, esto se muestra en la ecuación 2.

$$\sigma_p^2 = \sum_n^N \sum_m^N w_n * w_m * \sigma_{nm} \quad (2)$$

En la ecuación 2, σ_p^2 se refiere a la varianza de la ganancia del portafolio, es decir la medida del riesgo total, w_m proporción del capital asignado para invertir en el activo m , mientras que σ_{nm} es la covarianza entre los rendimientos de los activos n y m .

Después de calcular la función objetivo es posible realizar el cálculo de la relación ganancia riesgo, mostrada en la ecuación 3.

$$f_{obj} = \frac{\sum_{n=1}^N \bar{r}_n * w_n}{\sum_n^N \sum_m^N w_n * w_m * \sigma_{nm}} \quad (3)$$

La ecuación 3 es monótona, creciente y continua; lo cual es condición suficiente para que pueda tener valores máximos y mínimos, mismos que pueden ser obtenidos por medio de técnicas de optimización, que se define como la búsqueda, de un vector $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : \max(f(\vec{x})) \vee \min(f(\vec{x}))$ para problemas de optimización mono objetivo. Esto ha permitido que el Modelo del Portafolio Óptimo sea solucionado, por diversos como lo muestra la tabla 1.

Tabla 1. Síntesis de trabajos relacionados.

Objeto de Estudio: Solución al Modelo del Portafolio Óptimo	
Revisión de literatura	Es posible identificar 3 ejes de trabajos en la búsqueda de los montos a invertir en un portafolio de inversión
	Ejes a) Métodos analíticos [1] b) Técnicas de Aprendizaje Automático [3] c) Técnicas de algoritmos metaheurísticos [4] [5] [6]
	Los trabajos del eje a se caracterizan por • Uso del Gradiente reducido Generalizado
	Los trabajos del eje b se caracteriza por: • Uso de Redes Neuronales Artificiales
Puntos a resaltar	Los trabajos del eje c se caracterizan por: • Uso de Algoritmos Genéticos • Uso de Algoritmos de Evolución Diferencial • Uso de Algoritmos de Selección Clonal
	Es resaltable en los trabajos propios del eje a • Este tipo de solución suele omitir la diversificación, es decir, llegan a sugerir que se invierta incluso en un solo activo financiero. Como en [1] donde se recomienda, en una de sus opciones de portafolio, invertir en solamente cinco activos y en otras opciones de portafolio los montos sugeridos son negativos; por lo anterior, no se le puede denominar diversificación.
	En los trabajos propios del eje b se caracteriza por usar • Uso de un extendido conjunto de datos
Esquema a Usar	En los trabajos propios del eje c se caracteriza por usar • El teorema No Free Lunch obliga a probar la respuesta de los nuevos algoritmos a situaciones específicas
	Del estado del arte es posible plantear un modelo a partir de a) La necesidad de probar nuevos algoritmos evolutivos en los problemas relacionados al portafolio óptimo de Markowitz

A partir de lo expuesto en la tabla 1 en este trabajo se presenta la evaluación de algunos algoritmos de carácter depredador que se caracterizan en emular los procesos de ciertos animales para proveerse de alimentos.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Los algoritmos evolutivos, son considerados los primeros métodos metaheurísticos que resuelven problemas de optimización, estos pueden ser numéricos o combinatorios,

dependiendo de la naturaleza del dominio del problema. La palabra metaheurístico se deriva del prefijo *meta* “más allá” y *heurístico* que proviene del griego *εὕρισκειν*, *heuriskein*, es decir “encontrar”; y, hace referencia a una serie de métodos que parten de un conocimiento previo de un problema para refinarlo y encontrar una nueva composición de conocimiento. En la figura 1 se muestra la clasificación de diversos métodos metaheurísticos [7].

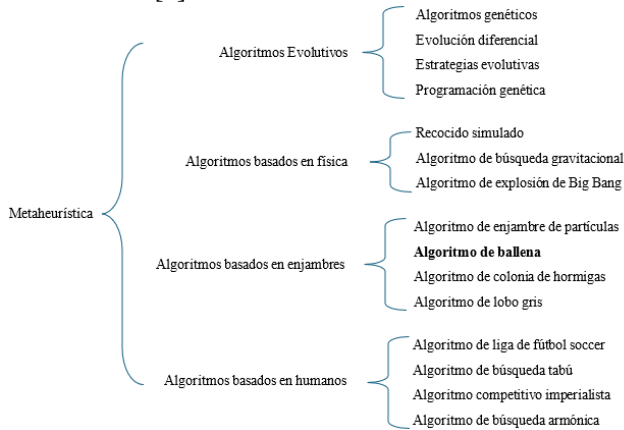


Figura 1. Ejemplos de metaheurísticas

En términos generales una metaheurística basa su funcionamiento en la exploración de un espacio de búsqueda P y cambio de posibles individuos que pueden ser representados vectorialmente como $\vec{x}^t = \{x_1^t, x_2^t, \dots, x_n^t\}$ que en conjunto se denominan población, cada elemento P representa una posible solución factible a un problema de optimización numérica o combinatoria, estas soluciones iniciales se transforman paulatinamente por la acción de un conjunto de operadores, los cuales se encargan de depurar a las soluciones hasta que estas converjan a un determinado punto denominado solución.

2.1. Algoritmos Genéticos

El Algoritmo Genético (Genetic Algorithm, GA, por sus siglas en inglés), desarrollado en la década de los 60 del siglo pasado, es el algoritmo evolutivo más conocido, es un método metaheurístico que fue propuesto por John Holland, adscrito a la Universidad de Michigan, a partir de los trabajos sobre la evolución de las especies desarrollados por Charles Darwin donde se estipulan las condiciones de supervivencia del individuo más apto en un entorno. Otro referente teórico en el desarrollo de los GA son las leyes de la herencia desarrolladas por Gregory Mendel [4]. El pseudocódigo de un GA canónico para función objetivo se muestra en el Algoritmo 1 [4].

Algoritmo 1 Algoritmo Genético

```

1  Inicializar aleatoriamente población  $X_i(1,2,3, \dots, n)$ 
2  Calcular la aptitud de cada cromosoma
3  Determinar el mejor cromosoma  $X^*$ 
4  while  $t < \text{máximo número de iteraciones}$  do
5      Seleccionar  $n$  cromosomas padres
    
```

```

6      Obtener cromosomas hijos a partir de los  $n$  cromosomas
        padres por medio de ecuaciones 4 y 5
7      Mutar aleatoriamente un cromosoma hijo
8      Los cromosomas hijos remplazan a los peores cromosomas
        de la población original (nueva población)
9      Calcular la aptitud de la nueva población
10     Actualizar el mejor cromosoma  $X^*$ 
11      $t = t + 1$ 
12 end while
13 Retornar  $X^*$ 
    
```

La literatura especializada documenta diversas formas de realizar el cruzamiento para un algoritmo genético que solucione un problema de optimización numérico, es decir, donde los elementos de la población P están codificados a partir de números reales, un ejemplo de esto es el cruzamiento aritmético que se muestran en las ecuaciones 4 y 5.

$$C_n^{H1} = \beta * C_n^1 + (1 - \beta) * C_n^2 \quad (4)$$

$$C_n^{H2} = \beta * C_n^2 + (1 - \beta) * C_n^1 \quad (5)$$

2.2. Optimización por Algoritmo de Ballena

El Algoritmo de Optimización de Ballena (Whale Optimization Algorithm WOA, por sus siglas en inglés) fue desarrollado por Seyedali Mirjalili y Andrew Lewis en 2016, investigadores adscritos a la Escuela de Información y Comunicación Tecnológica de la Universidad Griffith en Brisbane, Australia. Está soportado en el comportamiento depredador de las ballenas jorobadas y emula en esencia los siguientes comportamientos:

- Búsqueda de Presa: Las ballenas se mueven con aleatoriedad en busca de cardúmenes de peces.
- Cercamiento de Presa: Las ballenas rodean al cardumen de peces identificado.
- Técnica de Alimentación en Red de Burbujas: las ballenas cercan al cardumen de peces por medio de una espiral de burbujas tal como lo muestra la figura 2.

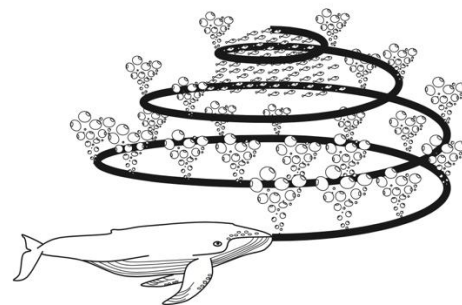


Figura 2. Cacería de peces por ballenas [7]

Existen dos aspectos destacables de la técnica de optimización tratada en este apartado:

1. La exploración que se define como la capacidad que tiene para sondear el espacio de soluciones del problema. Esto se traduce en evitar los óptimos locales.
2. La explotación permite optimizar la convergencia, dado que mejora de las soluciones actuales a partir de la información que se tiene sobre el problema de optimización.

El pseudocódigo de un WOA para función objetivo se muestra en el Algoritmo 2 [7].

Algoritmo 2 Optimización por algoritmo de Ballena	
1	Inicializar aleatoriamente población $X_i(1,2,3, \dots, n)$
2	Calcular la aptitud de cada agente de búsqueda
3	Determinar el mejor agente X^*
4	while $t < \text{máximo número de iteraciones}$ do
5	for cada agente de búsqueda
6	Actualizar a, A, C, l, p
7	if1 ($p < 0.5$)
8	if2 ($ A < 1$)
9	Actualizar la posición del agente de búsqueda actual por la Ecuación (6)
10	else if2 ($ A \geq 1$)
11	Seleccionar un agente de búsqueda aleatorio X_{rand}
12	Actualizar la posición del agente de búsqueda actual por la Ecuación (7)
13	end if2
14	else if1 ($p \geq 0.5$)
15	Actualizar la posición del agente de búsqueda actual por la Ecuación (8)
16	end if1
17	end for
18	Verificar si algún agente de búsqueda se sale del espacio de búsqueda y corregirlo
19	Calcular la aptitud de cada agente de búsqueda
20	Actualizar X^* si hay una mejor solución
21	$t = t + 1$
22	end while
23	Retornar X^*

La actualización de la posición de los agentes de búsqueda es determinada por medio de la ecuación 6 [7].

$$\vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}^*(t) - \vec{X}(t)| \quad (6)$$

Donde $\vec{C} = 2 \cdot \vec{r} \forall \vec{r} \in [0,1]$, $\vec{X}^*$ es el vector con la mejor posición y $\vec{X}(t)$ es el vector actual. Por otra parte, la ecuación 7, tiene como objetivo ampliar la fase de exploración [7].

$$\vec{x}(t+1) = \vec{X}_{rand} - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (7)$$

Donde $\vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}_{rand} - \vec{X}(t)|$. Por otra parte, la ecuación 8 emula el proceso de cercamiento del cardumen de peces por medio de espirales como lo muestra la figura 2.

$$\vec{x}(t+1) = \vec{D}^l \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) + \vec{X}^*(t) \quad (8)$$

Donde $\vec{D}^l = |\vec{X}^* - \vec{X}(t)|$ es la distancia entre el i -ésimo agente y el que representa la mejor solución al problema de optimización, b es una constante que define la forma de la espiral emulada en la ecuación 8, $l \in [-1,1]$ [7].

3. METODOLOGÍA

En esta sección se muestra el proceso metodológico que se usa en este trabajo investigativo. Dado que los algoritmos metaheurísticos tienen la finalidad de optimizar un fenómeno a partir de una función representativa, en este proceso investigativo se propone maximizar la función matemática descrita en la ecuación 3, usando activos financieros de la Bolsa Mexicana de Valores, cuyos rendimientos al cierre fueron registrados en un periodo de tiempo de septiembre de 2019 a septiembre de 2024. Estos y su rendimiento promedio durante el periodo se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Activos seleccionados.

Índice	Rendimiento promedio
Qualitas Compañía de Seguros	8.819569e-04
Corporación inmobiliaria Vesta	5.162075e-04
Fomento Económico Mexicano	6.028173e-05
Kimberly-Clark México	1.747484e-05
Coca-Cola FEMSA	3.883542e-04
Grupo Electra	2.045508e-04
Grupo Aeroportuario del Centro Norte	4.314582e-04
Grupo Aeroportuario del Pacífico	3.840923e-04

Posteriormente se aplica el proceso desarrollado en esta tesis, el cual consiste en realizar 40 pruebas sobre cada algoritmo con la finalidad de determinar la existencia de diferencias estadísticamente significativas, esto por medio de la aplicación de Tests de Anova o de Friedman.

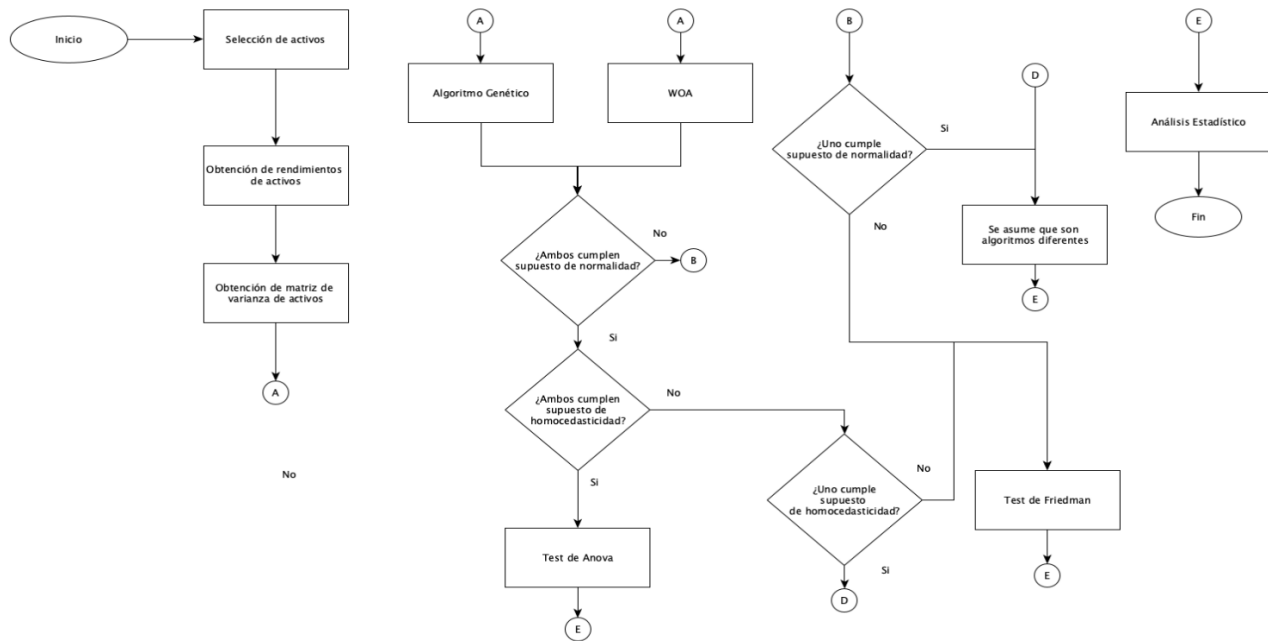


Figura 3. Esquema metodológico

4. RESULTADOS

La aplicación del proceso metodológico descrito en la figura 3 puede observarse en la gráfica de cajas mostrada en la figura 4

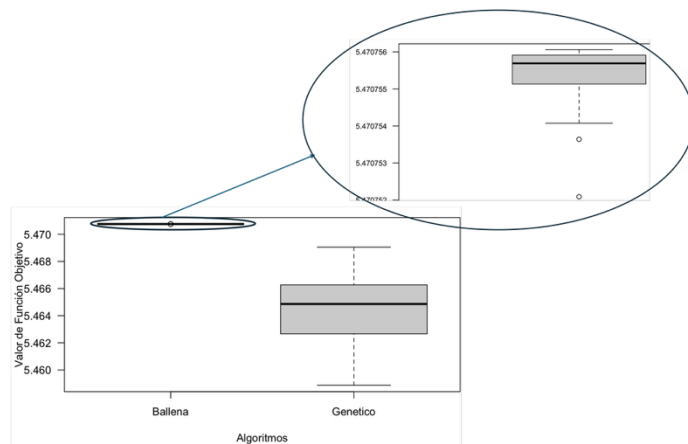


Figura 4. Diagrama de Cajas de los algoritmos

A partir de las ejecuciones realizadas a cada uno de los algoritmos, se aplica una prueba de normalidad, que, dado el tamaño de la muestra será Shapiro-Wilk, cuyos resultados se muestran la tabla 3.

Tabla 3. Resultados de prueba de Shapiro-Wilks.

Algoritmo	Valor de significancia	Aceptación /rechazo de supuesto de normalidad
GA	2.587e-07	RECHAZO
WOA	0.3001	ACEPTACIÓN

La tabla 4 muestra los resultados estadísticos de ambos algoritmos

Tabla 4. Resultados estadísticos de algoritmos WOA y GA

Estadísticos	Algoritmos a prueba	
	WOA	GA
Media	5.470755	5.464
Mediana	5.470756	5.465
Máximo	5.470756	5.469
Mínimo	5.470752	5.459
Cuartil 1	5.470755	5.463
Cuartil 2	5.470756	5.466

Como se puede observar, derivado de la tabla 4 el WOA muestra mejores resultados en el valor de la función objetivo, lo cual representaría la mejor relación ganancia/riesgo.

La figura 5 muestra el resultado de la convergencia de los algoritmos, donde se observa que el número de iteraciones que se requieren para encontrar la convergencia en las soluciones es

menor en el WOA (línea azul) con relación a las necesarias en el GA (línea roja).

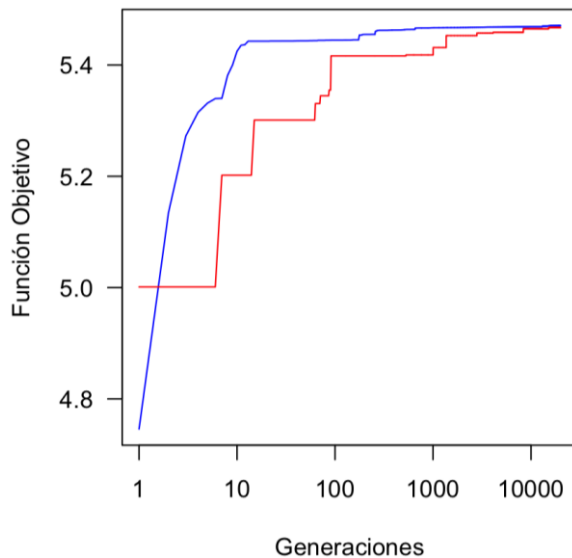


Figura 5. Convergencia de los Algoritmos

5. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos del proceso investigativo que se planteó, es posible distinguir los siguientes hechos:

1. El WOA converge más rápido tal como se indica en la literatura especializada y en la figura 4.
2. Como se muestra en la tabla 4, el intervalo, es decir, la distancia entre los valores máximo y mínimo es menor

en el WOA que en el GA, esto quiere decir que el WOA es más estable, lo que indica que los resultados entre las diversas ejecuciones tienen variaciones mínimas.

3. Los hechos antes descritos permiten afirmar que el WOA es mejor que el GA para el problema de optimización propuesto. Esto se debe a la mejor convergencia, es decir, el cumplimiento del comportamiento asintótico.

Referencias

- [1] D. W. H. Alrabadi, "Portfolio optimization using the generalized reduced gradient nonlinear algorithm", *Int. J. Islamic Middle Eastern Finance Manage.*, vol. 9, n.º 4, pp. 570–582, noviembre de 2016.
- [2] E. J. Elton y M. J. Gruber, "Modern portfolio theory, 1950 to date", *J. Banking & Finance*, vol. 21, n.º 11-12, pp. 1743–1759, diciembre de 1997.
- [3] X. Cao y S. Li, "Neural networks for portfolio analysis with cardinality constraints", *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, pp. 1–14, 2023.
- [4] J. F. García Mejía, Y. Martínez Garduño, P. Lizola-Margulis y F. E. Valdés Medina, "Diversificación de montos de inversión en un portafolio de divisas por medio de GRG y Algoritmos Evolutivos", *Programación Matemática y Softw.*, vol. 13, n.º 2, junio de 2021.
- [5] J. A. Zapata-Cortes, C. Sánchez-Ramírez, G. Alor-Hernández y J. L. García-Alcaraz, Eds., *Handbook on Decision Making*. Cham: Springer Int. Publishing, 2023.
- [6] G. Garduño-Ruiz, J. F. García-Mejía, E. E. Granda-Gutierrez, Y. Martínez-Garduño, P. E. Lizola-Margullis y L. L. Laurent-Martínez, "Comparación entre los algoritmos de selección clonal y GRG en un portafolio de inversión", *Padi Boletín Cient. Cienc. Basicas Ing. Del ICBI*, vol. 10, Especial4, pp. 28–36, octubre de 2022.
- [7] S. Mirjalili y A. Lewis, "The whale optimization algorithm", *Advances Eng. Softw.*, vol. 95, pp. 51–67, mayo de 2016.