

IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA IMPLÍCITO PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL FLUJO ENTRE DOS DISCOS DE UNA TURBINA TESLA.

César Adrián Pérez Cano¹, Humberto Arturo Béjar Sánchez^{1,2}

¹Tecnológico Nacional de México/I. T. Chihuahua, Av. Tecnológico, 2909, Chihuahua 31310, Chihuahua, México. 614-201-2000

²Departamento de Termofluidos, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Avenida Universidad 3000, México D.F. 04510, México.

¹cesarperez200230@gmail.com

²humberto.bs@chihuahua.tecnm.mx

RESUMEN

En el siguiente estudio se desarrolló un código numérico haciendo uso de software MATLAB, con la finalidad de resolver las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento idealizado del flujo entre dos discos. Lo anterior se planteó utilizando una modificación del método de Runge-Kutta de cuarto orden, desarrollando un algoritmo capaz de calcular los distintos valores de eficiencia en una turbina Tesla, considerando como variables las condiciones de entrada del fluido (flujo másico, temperatura y presión) elegidas por el usuario. Obteniendo así, información relevante para la elección de dimensiones útiles en su diseño. Los valores obtenidos fueron comparados con resultados de otra investigación destacada en la literatura. Los cuales concordaron de manera satisfactoria, obteniendo la eficiencia más alta para valores bajos de flujo másico, de esta manera validando la efectividad del método de solución propuesto.

Palabras Clave: Turbina Tesla, Runge-Kutta 4to orden, Flujo entre discos.

ABSTRACT

In the following study, a numerical code was developed using MATLAB software to solve the differential equations that describe the idealized behavior of the flow between two disks. This approach was proposed using a modification of the fourth-order Runge-Kutta method, developing an algorithm capable of calculating the different efficiency values in a Tesla turbine, considering the fluid inlet conditions (mass flow, temperature, and pressure) chosen by the user as variables. This provided relevant information for choosing useful dimensions in its design. The obtained values were compared with results from other notable research in the literature. These results were found to be in satisfactory agreement, obtaining the highest efficiency for low mass flow values, thus validating the effectiveness of the proposed solution method.

Keywords: Tesla Turbine, 4th-Order Runge-Kutta, Flow between disks

1. INTRODUCCIÓN

La aplicación de análisis numérico y algoritmos computacionales en áreas como la física, la ingeniería y la matemática aplicada representó uno de los principales avances del siglo XX y continúa siendo fundamental en la actualidad [2].

Uno de los problemas actuales es encontrar soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales que no tienen soluciones exactas, en general este es el caso de la mayoría de los fenómenos físicos, debido a que son complejos y no lineales, además no pueden ser simplificados debido a la naturaleza del sistema [3]. En el caso de la mecánica de fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes describen el comportamiento de los fluidos desde la atmosfera hasta los océanos. Sin embargo, hasta el momento no se cuenta con las matemáticas suficientes para encontrar una solución analítica para un caso generalizado, es por ello, que se ha optado por reducirlas, utilizando diversas simplificaciones, considerando condiciones ideales, tales como: fluido incompresible, flujo laminar y estado permanente, así como, flujo no viscoso, irrotacional, y sus combinaciones [4]. Aplicando las idealizaciones anteriores se pueden simplificar las ecuaciones Navier-Stokes eliminando términos complejos y no lineales, como lo son el término difusivo y el término convectivo. Cuando se eliminan términos y se emplean diversas definiciones matemáticas [5], es posible reducir estas ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) no lineales a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) lineales y no lineales según sea el caso. La ventaja del procedimiento anterior es la existencia de soluciones mediante la aplicación de métodos numéricos. Existen diversos algoritmos para resolver EDOs no lineales, siendo algunos de estos la familia de métodos de Runge-Kutta. Básicamente generan una solución en un intervalo combinando los valores obtenidos de algunos pasos calculados con el método de Euler [6].

Encontrar soluciones a casos aplicados de estas ecuaciones es de vital importancia para la ingeniería pues permite optimizar variables como lo son la potencia y eficiencia de máquinas de fluidos, como es el caso de la turbina Tesla.

La contribución del artículo es la siguiente:

- Propone una versión implícita del algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden para la solución de las ecuaciones de flujo entre discos en una turbina Tesla.

- Compara y contrasta los resultados del programa desarrollado frente a valores experimentales de la turbina.

2. MARCO TEORICO

2.1. Turbina Tesla

Las turbinas convencionales son aquellas que utilizan en su rotor: aspas, alabes o paletas como medio para captar la energía del fluido y transformarla en un movimiento útil en su eje de salida.

Una versión distinta a las turbinas convencionales fue ideada por Nikola Tesla, quien se basó en su motor eléctrico de inducción buscando producir un efecto similar por medio de las propiedades de los fluidos, valiéndose de la viscosidad y la condición de no deslizamiento [7].

El inventor describe que este tipo de turbomaquinaria funciona de una forma diferente a las convencionales, debido a que su rotor está compuesto por discos sólidos, planos, de espesor y diámetro finito, que están acomodados de forma paralela entre sí, espaciados una distancia determinada a lo largo del eje y perpendiculares al mismo. Como resultado del suministro del fluido de trabajo hacia el rotor desde una o varias boquillas distribuidas alrededor de la carcasa, éste fluye entre los discos y a medida en que avanza en el espacio entre ellos se genera el efecto de capa límite, por lo cual el fluido cede momentum al rotor provocando su rotación, para escapar finalmente por el centro de los mismos [8].

El propósito de la turbina Tesla de acuerdo con su creador es el de superar las desventajas que presentan las turbinas convencionales como: vibraciones mecánicas, cambios en la velocidad, choques, cavitación, métodos que utilizaban para impartir o derivar energía a partir de un fluido, tales como pistones, álabes, paletas y palas, lo que introducía numerosos defectos, limitaciones, complicada y tardada fabricación, mantenimiento laborioso y alto costo.

2.2. Métodos de Runge-Kutta

Existen múltiples métodos numéricos para encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, ya sean lineales o no lineales. Una familia de métodos altamente utilizada son los métodos de Runge-Kutta, debido a su eficacia frente a otros métodos como es el caso de los métodos de Euler [9]. Los métodos de Runge-Kutta siguen el esquema siguiente para el cálculo de la solución de una ecuación diferencial ordinaria del tipo:

$$y' = f(y, x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Donde y_0, x_0 son las condiciones iniciales de la ecuación. La solución se obtiene:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(y, x) dx \quad (2)$$

y_n es el valor actual calculado para y , y_{n+1} es el valor futuro para el que se está calculando y .

El último término de (2) conocido como función de incremento una vez que es discretizado se calcula combinando el resultado de varias soluciones por el método de Euler, cada uno de ellos requiriendo únicamente una evaluación de f por lo que estos métodos son de un solo paso.

El número de términos que componen la función de incremento definen el orden del método, siendo el cuarto orden uno de los más populares debido a su buen balance entre costo computacional, precisión e implementación ya sea contra otro de orden inferior o superior [6]. Esto es debido a que el error global se comporta como $O(h^4)$ en el caso de RK4 y el número de variables a calcular por cada paso se vuelve mayor a partir de Runge Kutta de orden 5.

La forma general del método es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = y_n + K \quad (3)$$

Siendo:

$$k_1 = hf(y_n, x_n) \quad (4)$$

$$k_2 = hf\left(y_n + \frac{1}{2}k_1, x_n + \frac{1}{2}h\right) \quad (5)$$

$$k_3 = hf\left(y_n + \frac{1}{2}k_2, x_n + \frac{1}{2}h\right) \quad (6)$$

$$k_4 = hf(y_n + k_3, x_n + h) \quad (7)$$

Respectivamente.

h es el tamaño de paso utilizado.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para obtener el cálculo de la eficiencia de una turbina Tesla se necesitan hacer una serie de simplificaciones a las ecuaciones de Navier-Stokes para así poder disminuir la complejidad del problema, Rice [1], plantea un modelo simplificado capaz de describir el comportamiento de la velocidad tangencial y el cambio de presión dentro de la turbina, volviendo estos parámetros adimensionales para conservar la generalidad del problema. Las ecuaciones que obtuvo son:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \frac{fr_0^2\Omega}{4bv_0}\left(\frac{v_0}{\Omega r_0}y - x\right)\left[1 + \left(\frac{2\pi br_0^2\Omega}{Q}\right)^2 x^2 \left(\frac{v_0}{\Omega r_0}y - x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho\Omega^2 r_0^2} \frac{dp}{dx} - \left(\frac{Q}{2\pi r_0^2 b\Omega}\right)^2 \left(\frac{1}{x^3}\right) - \left(\frac{v_0}{\Omega r_0}\right)^2 \left(\frac{y^2}{x}\right) - \frac{fr_0}{4b} \left(\frac{Q}{2\pi r_0^2 b\Omega}\right)^2 \left(\frac{1}{x^2}\right) \left[1 + \left(\frac{2\pi r_0^2 b\Omega}{Q}\right)^2 x^2 \left(\frac{v_0}{\Omega r_0}y - x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (9)$$

y = velocidad tangencial adimensional

x = posición radial adimensional

f = factor de fricción

r_0 = radio del disco

b = distancia entre discos adyacentes

Ω = velocidad angular de los discos

v_0 = velocidad angular en el extremo del disco

Q = caudal

p = presión adimensional

ρ = densidad

La ecuación (8) describe el comportamiento cinemático del fluido en su trayectoria a través de la turbina, por otra parte, la ecuación (9) describe el cambio de presión resultante a lo largo de líneas radiales en el flujo.

Diversos autores, como Mendoza presentaron sus soluciones utilizando métodos numéricos para las ecuaciones (8) y (9) utilizando el método trapezoidal extendido [10] en el caso del último. Rice [1], además proporciona diversos datos experimentales para ciertas configuraciones de la turbina, variando entradas de presión, caudal y velocidad de rotación de la turbina

El objetivo entonces es encontrar una solución a dichas ecuaciones utilizando el método de Runge-Kutta de 4to orden, compararlo contra los resultados de los autores ya mencionados y además generar un programa computacional capaz de calcular la solución a las ecuaciones tomando como variables parámetros de entrada como lo son: presión y temperatura del fluido de entrada, diámetro del disco, rugosidad del material, flujo másico entre otros, para comparar con los valores de eficiencia para la configuración experimental.

La eficiencia de la turbina es calculada como:

$$\eta = \frac{W}{\Delta p_t} = \frac{\left(\frac{v_0}{\Omega r_0}\right)(1-xy)}{\frac{\Delta p_t}{\rho \Omega^2 r_0^2}} \quad (10)$$

W = trabajo por unidad de masa

Δp_t = cambio de presión total

3.1. Consideraciones realizadas en el modelado del problema

Las condiciones para el cumplimiento de las ecuaciones (8) (9) y (10) es que el flujo se supone en estado permanente, incompresible, movimiento bidimensional, que además obedece la ley del gas ideal y sigue la correlación de Zivolousky y O'Sullivan (11) para calcular la viscosidad dinámica, el cálculo del factor de fricción se hizo a través de la ecuación de Churchill (12).

$$\mu = (90 + 0.35T) * 10^{-7} \text{ Pa} * \text{s} \quad (11)$$

$$f = 8 \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \left(\frac{1}{A+B} \right)^{3/2} \right]^{1/12} \quad (12)$$

μ = viscosidad dinámica

T = temperatura

Re = Número de Reynolds

A, B = Parámetros de Churchill

4. METODO DE SOLUCIÓN

Debido a las condiciones de frontera presentes (13) en las ecuaciones diferenciales principales, el método de Runge-Kutta de 4to orden tuvo que ser modificado para convertirse técnicamente en un método implícito, donde se tiene como dato conocido un valor futuro en vez del valor actual de la ecuación.

$$y(1) = 1 \quad \Delta p(1) = 0 \quad (13)$$

$$y_n = y_{n+1} - K \quad (14)$$

La ecuación (14) es la versión implícita de Runge-Kutta.

El problema se abordó desarrollando un programa en Matlab para resolver las ecuaciones: (8) (9) y (10), y generar las gráficas que describen el comportamiento de la turbina cuando se seleccionan los valores mostrados a continuación:

Tabla 1. Valor de parámetros adimensionales seleccionados.

Parámetro adimensional	Configuración 1 (Rice)	Configuración 2 (Mendoza)
$\frac{\Omega r_0}{v_0}$	1.00	1.00
f	0.02	0.025
$\frac{r_0}{h}$	50	50
$\frac{Q}{\Omega r_0^3}$	0.00001	0.0001

Al mismo tiempo se generó otro programa, el cual maneja como variables los parámetros adimensionales de flujo y velocidad de entrada y calcula las eficiencias máximas para cada configuración.

Por último, se creó un tercer programa el cual pide datos de entrada al usuario como se muestra en la figura 1, los cuales son: propiedades termodinámicas del fluido, así como valores geométricos y propiedades mecánicas del material de los discos para generar su grafica correspondiente, y calcular el valor de eficiencia máxima para esa configuración.

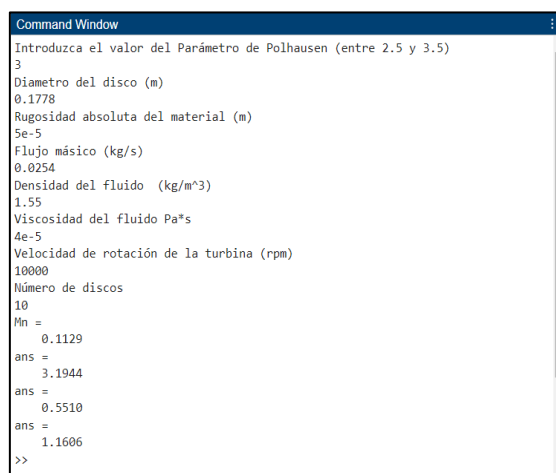


Figura 1. Pantalla de entrada de datos del usuario

El flujo de trabajo del tercer programa es el siguiente:

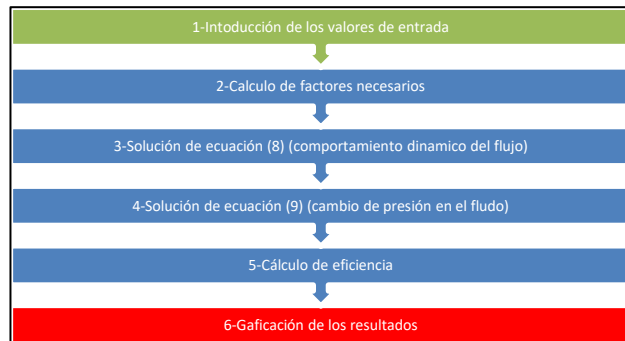


Figura 2: Diagrama de flujo del tercer programa.

Fragmentos de la sección 3 y 4 del código pueden ser consultadas en el apéndice, en la figura 6.

5. RESULTADOS

Los gráficos y valores de eficiencia máxima para la configuración 1 y 2 concuerdan con los resultados presentados por Rice [1] y Mendoza [9], teniendo una variación muy pequeña entre ellos como se muestra en las figuras 3 y 4 respectivamente.

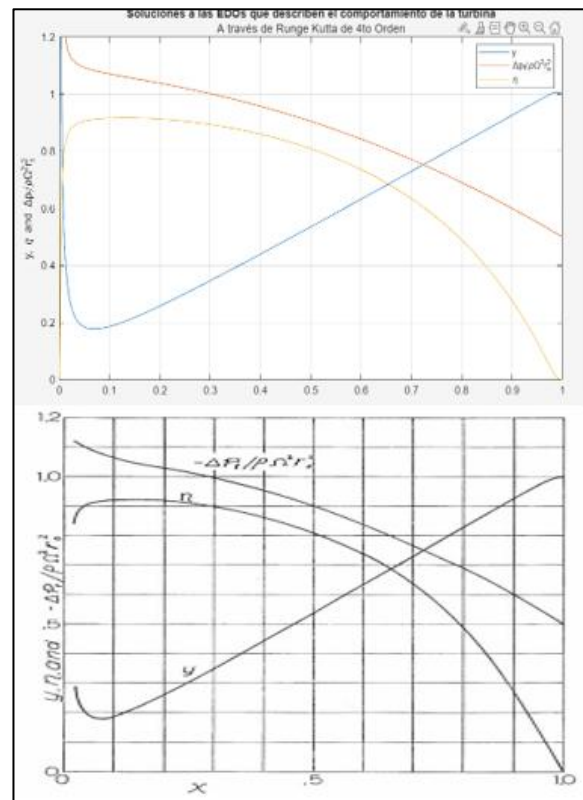


Figura 3. Comparación entre resultados del programa propio y la solución de Rice para configuración 1

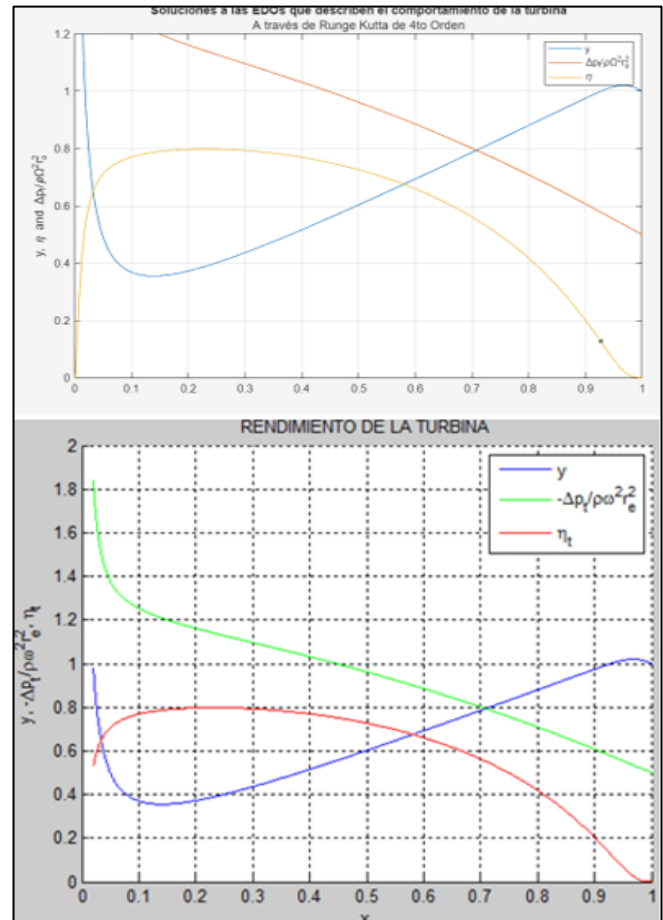


Figura 4. Comparación entre los resultados del programa propio y la solución de Mendoza para configuración 2

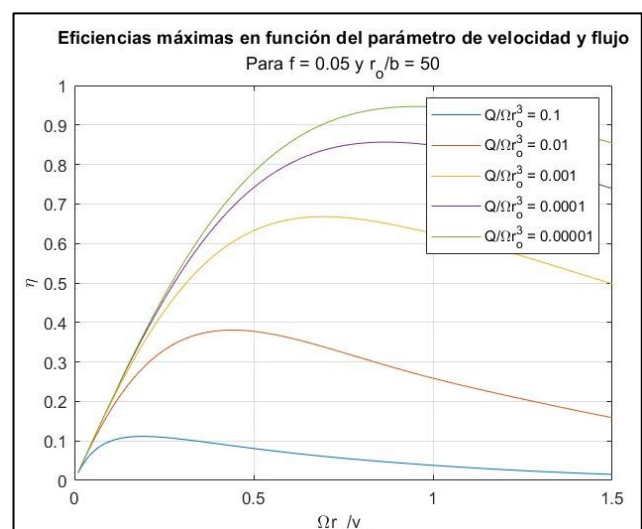


Figura 5. Eficiencias máximas

En las figuras 3 y 4 el eje de las abscisas indica la coordenada radial adimensional y el eje de las ordenadas se encuentra limitado a un rango de 0 a 1.2 e identifica el valor tanto de la velocidad tangencial adimensional (gráfica azul), presión adimensional (gráfica naranja) y eficiencia (gráfica amarilla) al mismo tiempo.

En la tabla 2 se calcula la variación entre los valores de máxima eficiencia obtenidos por Rice y Mendoza en sus configuraciones y el programa propio.

Tabla 2: Comparación de $x, y, \Delta p$ para eficiencia máxima

Configuración de Rice				
Variable	Rice	Propio	Variación	Variación relativa (%)
η	0.910	0.917	-0.007	-0.76
x	0.137	0.131	0.006	4.37
y	0.208	0.204	0.004	1.92
Δp	1.149	1.061	0.088	7.65
Configuración de Mendoza				
Variable	Mendoza	Propio	Variación	Variación relativa (%)
η	0.798	0.798	0	0
x	0.238	0.229	0.009	3.78
y	0.394	0.388	0.006	1.52
Δp	1.135	1.141	-0.006	-0.52

Como se puede apreciar en la figura 5, la eficiencia máxima en función de los parámetros de flujo y velocidad también guarda correlación con los resultados de Rice [1], se concuerda en que se obtiene una eficiencia más alta al manejar un parámetro de flujo menor, pues con un valor de 0.00001 se alcanzan eficiencias de más del 90%, y muestra una tendencia hacia un valor de 100% en el parámetro de velocidad cuando el parámetro de flujo es mínimo.

Esto sugiere que las mejores eficiencias teóricamente deberían de encontrarse con un caudal bajo y una velocidad de rotación alta, lo cual experimentalmente aún no ha quedado claro del todo.

Para la figura 5 debe interpretarse que cada punto en las gráficas corresponde a la eficiencia máxima de una gráfica como las que son mostradas en las figuras 3 y 4.

Una vez validada la veracidad del método frente a los datos obtenidos por Rice [1] y Mendoza [9]. En la tabla 3 se comparan los resultados experimentales contra el programa generado:

Tabla 3. Comparación de datos experimentales de Rice y solución numérica.

Psig	°F	Lbm/min	rpm	η experimental	η código
40	203	2.82	6300	21.7	22.6
40	203	2.82	8500	25.4	27.2
40	203	2.82	9200	25.8	28.5
60	175	4.05	8000	21.2	32.0
60	175	4.05	10000	23.8	35.8
60	175	4.05	11000	24.4	37.4
60	175	4.05	11500	20.2	38.2
80	182	3.48	8000	21.7	32.2
80	182	3.48	10000	23.8	36.0

Se puede observar que para condiciones de baja presión y caudal, los resultados experimentales y numéricos son muy parecidos, pero en tanto comienzan a incrementarse, los resultados empiezan a discrepar, debido a diferentes factores, ya que el aire deja de comportarse como un gas ideal y además, los efectos de compresibilidad se vuelven más significativos, las condiciones de flujo se tornan más turbulentas por lo que las pérdidas de energía se vuelven mayores y otras pérdidas mecánicas que no se toman en cuenta en el modelo se vuelven más notables.

Las gráficas y resultados para las condiciones de bajo flujo másico mostradas en la Tabla 3 pueden ser revisadas en el Apéndice.

6. CONCLUSIONES

Las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo entre dos discos planteadas por Rice [1], fueron resueltas utilizando el método de Runge-Kutta de 4to orden implícito, obteniéndose resultados muy similares a los publicados por Rice y Mendoza [9], además de alcanzar una correlación satisfactoria con los resultados de otros autores presentados para condiciones de flujo másico bajo, y variando conforme se aumenta el valor de este.

El uso de un método implícito también muestra resultados precisos en comparación a otros métodos de solución.

Estos resultados son útiles para calcular parámetros de diseño en la turbina tales como: la posición radial de la salida de los discos u optimizar las condiciones de entrada del fluido, siendo las que deberían considerarse como de salida en la tobera.

Se recomienda optar por un modelo matemático más complejo para tomar en cuenta no solo condiciones ideales, si no, por el contrario, considerar factores fuera del rotor, con el fin de generar un programa que se acerque más a la realidad y poder tomar decisiones en el diseño de la turbina Tesla, tal como el caso de un flujo másico mayor a 4 lb/min pues es el valor donde comienzan a separarse los resultados numéricos y experimentales bajo el modelo presentado en el artículo.

7. REFERENCIAS

- [1] W. Rice, An Analytical and Experimental Investigation of Multiple-Disk Turbines, J. Eng. Power, vol. 85, no. 3, pp. 191–198, 1963
- [2] N. J. Giordano y H. Nakanishi, Computational Physics, Boston, MA, USA: Addison-Wesley, 1992.
- [3] H. Schlichting, Boundary-Layer Theory, Berlin: Springer, 2017
- [4] Y. Çengel, Fluid Mechanics, NY: McGraw-Hill, 2014
- [5] F. M. White, Mecánica de Fluidos, McGraw-Hill, 2011.
- [6] S. Rajasekar, Numerical Methods Classical and Advanced Topics, Florida: CRC Press, 2024
- [7] W. B. Carlson, Tesla. Inventor de la Era Eléctrica, 1st ed. México: Crítica, 2015.
- [8] P. May, N. Tesla, and N. E. W. York, “» N. Tesla,,” 1913.
- [9] S. Nakamura, Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB, Edo. de México: Prentice-Hall hispanoamericana, 1997.
- [10] G. Mendoza, Diseño de una Turbina sin Álabes con enfoque de Optimización, Centro Nacional De Investigación y Desarrollo Tecnológico, 2012.

8. APENDICE

```
%Declaracion del dominio y Condiciones Iniciales
x = (x1:-h:xf); %El paso se pone negativo porque va de 1 a 0 el dominio de x
y(1) = yi;

%Codigo del metodo de RK4toOrden
%Resete la k (o el resultado de la integral) en vez de sumarla ya que estamos calculando diferencias hacia atras
for i = 1:(length(x)-1)
    k1 = h.*func(x(i),y(i));
    k2 = h.*func(x(i)+0.5.*h, y(i)+0.5.*k1);
    k3 = h.*func(x(i)+0.5.*h, y(i)+0.5.*k2);
    k4 = h.*func(x(i)+h, y(i)+k3);
    k = (1/6).*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    y(i+1) = y(i)-k;
end

%Solucionar para dp/dx

%Asignacion de la funcion, paso, dominio y condiciones iniciales y condiciones de la funcion
function res = func2(x,y)
load('Solver_datos_usuario','f','r','o','q')
res = (((r.*q)./(2*pi)).^2.*(1./(x.^3)))+(1./o).^2).*(y.^2./x)+(f.*r./4).*((r.*q)./(2*pi)).^2.*(1./(x.^2)).*(1+(2*pi
```

Figura 6. Fragmento del código en Matlab

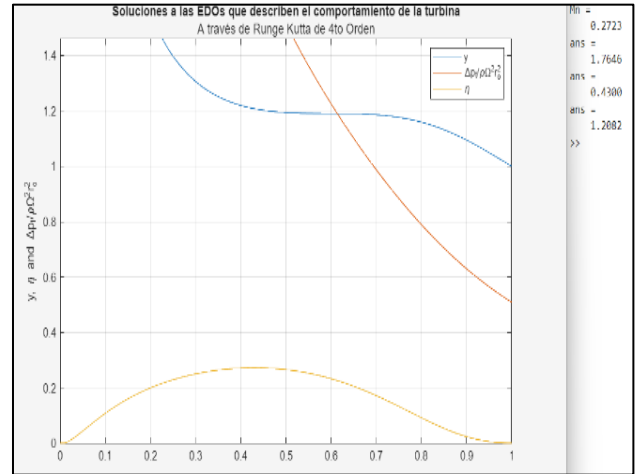


Figura 9. Grafica para Q = 2.82 lbm/min, rpm = 8500

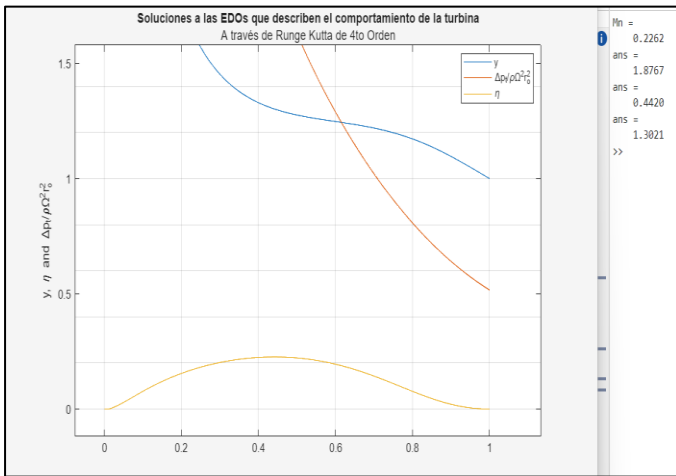


Figura 7. Grafica para Q = 2.82 lbm/min, rpm = 6300

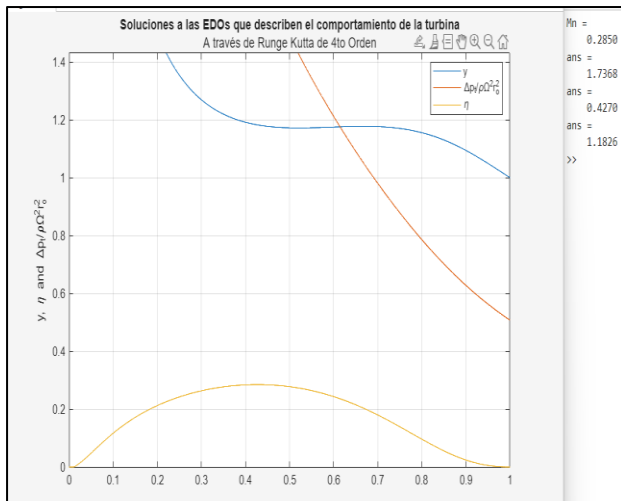


Figura 8. Gráfica para Q = 2.82 lbm/min, rpm = 9200