

REGULADOR PID ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

Méndez-García Marvin E., Reyes-Cortes Fernando, Sánchez-Sánchez Pablo, Gutiérrez-Arias Moisés.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Electrónica, Robótica y Control.

Maestría de Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización

18 sur y Av. San Claudio, Col. San Manuel, Ciudad Universitaria.

Puebla, Puebla. C. P. 72570.

mg224470179@alm.buap.mx, fernando.reyes@correo.buap.mx, pablo.sanchez@correo.buap.mx,

jose.gutierrez@correo.buap.mx

RESUMEN

El presente trabajo aborda el problema fundamental de la estabilidad en reguladores PID lineales aplicados a sistemas lagrangianos, un área donde las pruebas de estabilidad asintótica global aún son un desafío abierto. Se presenta un análisis riguroso para un péndulo de un grado de libertad, introduciendo una nueva función candidata de Lyapunov. La novedad de esta función radica en su estructura, que incluye términos de acoplamiento cruzado normalizados. Mediante el Criterio de Sylvester, se derivan un conjunto de condiciones algebraicas en forma de desigualdades sobre las ganancias del controlador, las cuales garantizan la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio en lazo cerrado. El desempeño del sistema y la validez del análisis se confirman a través de resultados de simulación, mostrando una convergencia suave y sin sobre impulsos al punto de equilibrio.

Palabras Clave: Reguladores PID, función de Lyapunov, estabilidad asintótica global, péndulo.

ABSTRACT

This paper addresses the fundamental problem of stability in linear PID controllers applied to Lagrangian systems, an area where proofs of global asymptotic stability remain an open challenge. A rigorous analysis is presented for a single degree-of-freedom (DOF) pendulum by introducing a novel Lyapunov candidate function. The novelty of this function lies in its structure, which includes normalized cross-coupling terms. Using Sylvester's Criterion, a set of algebraic conditions in the form of inequalities on the controller gains is derived, guaranteeing the global asymptotic stability of the closed-loop equilibrium point. The system's performance and the analysis's validity are confirmed through simulation results, showing a smooth, overshoot-free convergence to the equilibrium point.

Keywords: PID regulators, Lyapunov function, global asymptotic stability, pendulum.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día los reguladores clásicos PD y PID son ampliamente conocidos y los más populares en el ámbito de control automático; el esquema PID es el resultado de mejorar el desempeño del control PD, significativamente en estado estacionario, donde el error de posición no es cero, a este efecto se le conoce como offset, lo cual hace que las variables de estado

de la ecuación en lazo cerrado (error de posición y velocidad de movimiento), no converjan al punto de equilibrio. Con la finalidad de subsanar esta deficiencia, se incluye una nueva variable de estado, determinada por la acción de control integral, la cual tiene la finalidad de inyectar cierta cantidad de energía mecánica, para disminuir el error en estado estacionario. Dicha acción de control integral modifica el estado transitorio al igual que la acción de control derivativo; sin embargo, su principal beneficio se encuentra en el estado estacionario, disminuyendo la magnitud del error de posición. Un problema fuerte sobre análisis de estabilidad para el esquema PID lineal y que aún persiste, es que no se ha podido probar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado en robots manipuladores de n grados de libertad (gdl) [1], [2], [3], [4], [7]. En este trabajo se aborda como caso de estudio un problema menor, pero no menos importante, sobre un sistema dinámico de un gdl; se trata de construir una nueva propuesta sobre la estructura de la función estricta de Lyapunov, que facilite el análisis de estabilidad asintótica en forma global. Si bien existe en la literatura robots más complejos como el péndulo invertido o el esférico, en estos no se utiliza el criterio de Sylvester para la demostración de la función de Lyapunov [10], [11], [12], [13], [14]. Cabe mencionar que la novedad de esta función radica en la inclusión de términos de acoplamiento cruzado normalizados por los términos $(1 + \tilde{q}^2)$ y $(1 + \tilde{\epsilon}^2)$.

2. MODELO DINÁMICO DEL PÉNDULO

La estructura del modelo dinámico del péndulo es obtenida tomando en cuenta la configuración adoptada como un sistema lagrangiano [5], [6], [7], el cual se muestra en la Figura 1. Para llegar a la expresión final del modelo dinámico del péndulo se usa la metodología de Euler-Lagrange:

$$\tau = I_p \ddot{q} + b \dot{q} + mgl_c \sin(q) \quad (1)$$

donde:

- $I_p = ml_c^2 + I_{zz}$ es el momento de inercia del péndulo, formado por el momento de inercia del rotor I_{zz} del

servomotor más el momento de inercia de la barra metálica ml_c^2 .

- m : masa.
- l_c : centro de masa.
- g : constante de aceleración gravitacional (9.81m/seg²).
- b : coeficiente de fricción viscosa.
- q : posición articular.
- $\dot{q}$: velocidad articular.
- $\ddot{q}$: aceleración articular.

3. ESTRUCTURA DEL REGULADOR PID

En el caso del regulador PID se toma una estructura clásica representada por la siguiente expresión [6], [7]:

$$\tau = k_p \ddot{q} + k_i \int_0^t \ddot{q}(\sigma) d\sigma - k_v \dot{q} + mgl_c \sin(q) \quad (2)$$

donde:

- $k_p \in \mathbb{R}_+$: ganancia proporcional.
- $k_i \in \mathbb{R}_+$: ganancia integral.
- $k_v \in \mathbb{R}_+$: ganancia derivativa.
- $\tilde{q} \in \mathbb{R}$ es el error de posición, definido como la diferencia entre la posición deseada q_d y la posición q del péndulo ($\tilde{q} = q_d - q$).

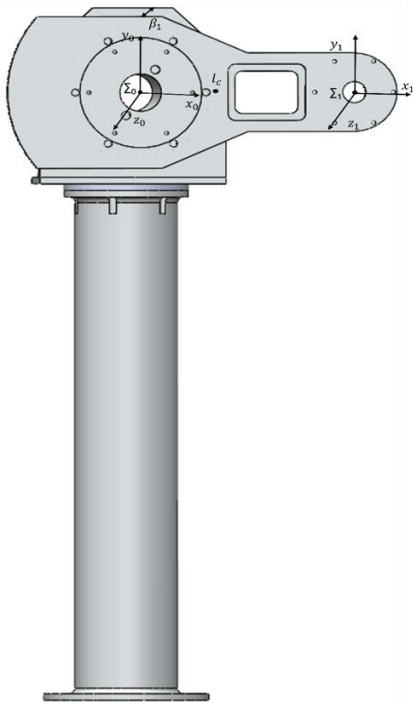


Figura 1. Sistema dinámico lagrangiano péndulo.

Tomando en cuenta la dinámica del péndulo de la expresión (1) sin considerar la fricción del sistema que depende de la función signo y sustituyendo en (2) se tiene la siguiente relación:

$$I_p \ddot{q} + b \dot{q} + mgl_c \sin(q) = k_p \ddot{q} + k_i \int_0^t \ddot{q}(\sigma) d\sigma - k_v \dot{q} + mgl_c \sin(q) \quad (3)$$

Simplificando la relación anterior y despejando a $\ddot{q}$:

$$\ddot{q} = \frac{1}{I_p} \left[k_p \ddot{q} + k_i \int_0^t \ddot{q}(\sigma) d\sigma - \dot{q}(k_v + b) \right] \quad (4)$$

Seleccionando las variables de estados adecuadas $(\tilde{q}, q, \epsilon)$, se tiene la siguiente representación matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ \frac{1}{I_p} [k_p \tilde{q} + k_i \epsilon - (k_v + b) \dot{q}] \\ \tilde{q} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Donde la variable de estado de la acción integral es $\epsilon = k_i \int_0^t \tilde{q}(\sigma) d\sigma \pm \epsilon(0)$, siendo $\epsilon(0)$ su respectiva condición inicial.

Cabe destacar que en dicha integral $\int_0^t \tilde{q}(\sigma) d\sigma$, desde el estado transitorio influye en el cálculo del área bajo la curva del error, mientras que, en el estado estacionario, dicha contribución tiende a una constante k (diferente de cero), debido a la disminución del error de posición.

Observe que en la ecuación en lazo cerrado (6) el punto de equilibrio $[\tilde{q}, \dot{q}, \epsilon] = [0, 0, k]$ no corresponde al origen $[0, 0, 0]$ de las variables de estado; dado que el análisis de estabilidad de Lyapunov se formula canónicamente en torno al origen, se hace un traslado hacia este, para esto se define una nueva variable de estado, la cual se encuentra definida de la siguiente manera:

$$\hat{\epsilon} = \int_0^t \tilde{q}(\sigma) d\sigma = \epsilon(t) - k \quad (6)$$

Al momento de calcular la derivada temporal de la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \hat{\epsilon} = \epsilon(t) = \tilde{q} \quad (7)$$

Por lo que la representación matricial de la ecuación de lazo cerrado entre el péndulo y el regulador PID es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \hat{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{k_p}{I_p} & -\frac{b+k_v}{I_p} & \frac{k_i}{I_p} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \hat{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (8)$$

4. FUNCIÓN CANDIDATA DE LYAPUNOV

En esta sección se desarrolla el correspondiente análisis de estabilidad asintóticamente global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (8). Para esta finalidad, se propone una función candidata de Lyapunov, tal que permita cumplir con dicho objetivo; para esto se diseña de la siguiente forma. Su estructura corresponde a términos cuadráticos de cada una de las variables de estado, más productos cruzados entre las variables de estados y normalizados de manera conveniente.

La composición de términos cuadráticos corresponde a los elementos de la diagonal principal de la matriz que se obtiene en la representación matricial de la función cuadrática, también se pueden ver los términos cruzados que estarán presentes en el resto de los elementos de la matriz.

$$V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\epsilon}) = \frac{1}{2} I_p \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k_p \tilde{q}^2 + \frac{1}{2} k_i \tilde{\epsilon}^2 - \left[\alpha_0 \frac{I_p \dot{q} \tilde{\epsilon}}{1 + \tilde{\epsilon}^2} + \alpha_1 \frac{I_p \dot{q} \tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} + \alpha_2 \frac{I_p \tilde{\epsilon} \tilde{q}}{1 + \tilde{q}^2} \right] \quad (9)$$

Donde: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ son constantes positivas que tienen la finalidad de auxiliar en el desarrollo matemático del análisis de estabilidad, y únicamente se requiere demostrar la existencia de cada constante, pero no es necesario conocer sus valores numéricos, puesto que no se requiere en la estructura del PID (2).

La función (9) debe ser definida positiva, su análisis se realiza a través del criterio de Sylvester a través de su representación matricial:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\epsilon}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q} & \dot{q} & \tilde{\epsilon} \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \tilde{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde P es una matriz simétrica con los siguientes elementos:

$$P = \begin{bmatrix} k_p & -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_2}{1 + \tilde{q}^2} & -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} \\ -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_2}{1 + \tilde{q}^2} & k_i & -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_0}{1 + \tilde{\epsilon}^2} \\ -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} & -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_0}{1 + \tilde{\epsilon}^2} & I_p \end{bmatrix} \quad (11)$$

El criterio de Sylvester establece que dada una función cuadrática con la siguiente estructura $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ donde P es una matriz cuadrada $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, (en este caso $n = 3$), debe satisfacer lo siguiente :[7]

- La matriz P presente en la función cuadrática (9) se obtiene con la forma: $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, la cual debe cumplir con $P = P^T$.

- El primer elemento de la matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ debe ser positivo, $p_{11} > 0$.
- Todos los determinantes menores principales de la matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sin excepción deben ser positivos.
- Por último, el determinante principal de la matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene que ser positivo, esto es $\det(P) > 0$.

Ahora se procede a emplear las condiciones anteriores para demostrar que la función de energía propuesta es definida positiva.

- 1) Primera condición $P = P^T$. Es evidente ver que la matriz de la expresión (11) es igual a su transpuesta, por lo que se cumple la primera condición.
- 2) $p_{11} > 0$; se puede notar que: $k_p > 0$.
- 3) Los 3 determinantes menores deben ser positivos:

Para el determinante de la submatriz con índices {1,2}:

$$\begin{vmatrix} k_p & -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_2}{1 + \tilde{q}^2} \\ -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_2}{1 + \tilde{q}^2} & k_i \end{vmatrix} = k_p k_i - \left(-\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_2}{1 + \tilde{q}^2} \right)^2 \quad (12)$$

Debido a que el determinante debe ser positivo, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{4k_p k_i}{I_p^2} > \frac{\alpha_2^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} > 0 \quad (13)$$

Para el determinante de la submatriz con índices {1,3}:

$$\begin{vmatrix} k_p & -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} \\ -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} & I_p \end{vmatrix} = k_p I_p - \left(-\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} \right)^2 \quad (14)$$

Obteniendo la siguiente relación:

$$\frac{4k_p}{I_p} > \frac{\alpha_1^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} > 0 \quad (15)$$

Por último, ara el determinante de la submatriz con índices {2,3}:

$$\begin{vmatrix} k_i & -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_0}{1 + \tilde{\epsilon}^2} \\ -\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_0}{1 + \tilde{\epsilon}^2} & I_p \end{vmatrix} = k_i I_p - \left(-\frac{I_p}{2} \frac{\alpha_0}{1 + \tilde{\epsilon}^2} \right)^2 \quad (16)$$

Obteniendo la siguiente relación:

$$\frac{4k_i}{I_p^2} > \frac{\alpha_0^2}{(1 + \hat{\epsilon}^2)^2} > 0 \quad (17)$$

Se puede apreciar que con las relaciones anteriores se demuestra la existencia de las constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$; las cuales se encuentran en un intervalo bien definido delimitado por una cota superior constante. Con esto se demuestra también que cada uno de los determinantes menores de la matriz P son definidos positivos.

- 4) El determinante principal de la matriz P debe ser positivo, para esto se realiza lo siguiente:

El determinante principal es positivo si se cumple la siguiente desigualdad:

$$\det(P) = k_p k_i I_p - \frac{k_p I_p^2}{4} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \hat{\epsilon}^2)^2} - \frac{I_p^3}{4} \frac{\alpha_2^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} - \frac{I_p^3}{4} \frac{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}{(1 + \hat{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)^2} - \frac{k_i I_p^2}{4} \frac{\alpha_1^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} > 0 \quad (18)$$

Realizando las correspondientes operaciones se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{4k_p k_i}{I_p^2} > \frac{\alpha_2^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} + \frac{k_p}{I_p} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \hat{\epsilon}^2)^2} + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}{(1 + \hat{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)^2} + \frac{k_i}{I_p} \frac{\alpha_2^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \quad (19)$$

Observando la ecuación (19) se puede notar que comparte la misma cota superior que la expresión (13), además el primer elemento del lado derecho de la desigualdad en (19), es idéntico a su homólogo en (13). Tomando en cuenta esto se tiene la siguiente relación:

$$\frac{4k_p k_i}{I_p^2} > \frac{\alpha_2^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} + \frac{k_p}{I_p} \frac{\alpha_0^2}{(1 + \hat{\epsilon}^2)^2} + \frac{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}{(1 + \hat{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)^2} + \frac{k_i}{I_p} \frac{\alpha_2^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} > \frac{\alpha_2^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \quad (20)$$

Debido a que la expresión (13) está autocontenida en la ecuación (20) y debido a que las constantes $k_p, k_i, I_p, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ y las variables se encuentran elevadas al cuadrado, se puede inferir que siempre se tendrán términos positivos, por lo que se cumple la última condición del criterio de Sylvester, entonces la función (9).

La derivada temporal de la función de energía (9) se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}, \hat{\epsilon}) = & 2k_i \hat{\epsilon} \dot{q} - (b + k_v) \dot{q}^2 - \frac{\alpha_0}{1 + \hat{\epsilon}^2} \hat{\epsilon} \tilde{q} k_p \\ & - \frac{\alpha_0}{1 + \hat{\epsilon}^2} k_i \hat{\epsilon}^2 + \frac{\alpha_0}{1 + \hat{\epsilon}^2} (b + k_v) \hat{\epsilon} \dot{q} \\ & - \frac{\alpha_0}{1 + \hat{\epsilon}^2} I_p \dot{q}^2 + \frac{\alpha_0 I_p \dot{q}^2}{2} \\ & - \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} k_p \tilde{q}^2 - \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} k_i \hat{\epsilon} \tilde{q} \\ & + \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} (b + k_v) \dot{q} \tilde{q} + \frac{\alpha_1}{1 + \tilde{q}^2} I_p \dot{q}^2 \\ & - \frac{\alpha_1 I_p \dot{q}^2}{2} - \frac{\alpha_2}{1 + \tilde{q}^2} I_p \tilde{q} \dot{q} \\ & + \frac{\alpha_2}{1 + \tilde{q}^2} I_p \hat{\epsilon} \dot{q} + \frac{\alpha_2 I_p \hat{\epsilon} \dot{q}}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Donde se toman en cuenta las siguientes relaciones obtenidas de la ecuación lazo cerrado entre el péndulo y el regulador PID:

- $\ddot{q} = \frac{1}{I_p} [k_p \tilde{q} + k_i \hat{\epsilon} - \dot{q}(k_v + b)]$
- $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$
- $\dot{\hat{\epsilon}} = \dot{q}$

Y además se ha acotado la ecuación (21) mediante las siguientes relaciones $\frac{\tilde{q}^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \leq \frac{1}{4}$ y $\frac{\hat{\epsilon}}{(1 + \hat{\epsilon}^2)^2} \leq \frac{1}{4}$, los cuales son sus respectivos supremos.

La representación matricial de la función obtenida adquiere la siguiente estructura:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}, \hat{\epsilon}) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{q} & \dot{q} & \hat{\epsilon} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \\ \hat{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Donde Q es una matriz simétrica a la que se han factorizado los términos negativos y está conformada por los siguientes elementos:

- $q_{11} = 2 \frac{\alpha_1 k_p}{1 + \tilde{q}^2}$
- $q_{12} = p_{21} = -\frac{\alpha_1 (b + k_v)}{1 + \tilde{q}^2} + \frac{\alpha_2 I_p}{1 + \tilde{q}^2}$
- $q_{13} = p_{31} = \frac{\alpha_0 k_p}{1 + \hat{\epsilon}^2} + \frac{\alpha_1 k_i}{1 + \tilde{q}^2}$
- $q_{22} = 2 \left(b + k_v + \frac{\alpha_0 I_p}{1 + \hat{\epsilon}^2} - \frac{\alpha_0 I_p}{2} - \frac{\alpha_1 I_p}{1 + \tilde{q}^2} + \frac{\alpha_1 I_p}{2} \right)$
- $q_{23} = -2k_i - \frac{\alpha_0 (b + k_v)}{1 + \hat{\epsilon}^2} - \frac{\alpha_2 I_p}{1 + \tilde{q}^2} - \frac{\alpha_2 I_p}{2}$
- $q_{33} = 2 \frac{\alpha_0}{1 + \hat{\epsilon}^2} k_i$

Observe que debido al signo negativo de la matriz Q , se necesita demostrar que esta matriz es definida positiva, para que esto implique que la derivada de la función propuesta es definida negativa.

1. La condición $Q = Q^T$ se cumple, en efecto se trata de una matriz simétrica.

2. $q_{11} > 0$; para este caso, se tiene la siguiente relación:

$$2 \frac{\alpha_1 k_p}{1 + \tilde{q}^2} > 0 \quad (23)$$

Se debe recordar que anteriormente se había definido a las constantes $\alpha_1 k_p \in \mathbb{R}_+$ de tal manera que la ecuación anterior se cumple $\forall \tilde{q}$.

3. Los 3 determinantes menores principales deben ser positivos. Para el determinante de la submatriz con índices {1,2}:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} &= \frac{4\alpha_1 k_p b}{1 + \tilde{q}^2} + \frac{4\alpha_1 k_p k_v}{1 + \tilde{q}^2} - \frac{2\alpha_0 \alpha_1 k_p I_p}{1 + \tilde{q}^2} \\ &+ \frac{4\alpha_0 \alpha_1 k_p I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)} - \frac{4\alpha_1^2 k_p I_p}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \\ &+ \frac{2\alpha_1^2 k_p I_p}{1 + \tilde{q}^2} - \frac{\alpha_1^2 (b + k_v)^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \\ &+ \frac{2\alpha_1 \alpha_2 (b + k_v) I_p}{(1 + \tilde{q}^2)^2} - \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

A partir del determinante menor se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha_1 k_p b}{1 + \tilde{q}^2} + \frac{4\alpha_1 k_p k_v}{1 + \tilde{q}^2} &> \frac{2\alpha_1^2 k_p I_p}{1 + \tilde{q}^2} - \frac{4\alpha_0 \alpha_1 k_p I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)} \\ &- \frac{2\alpha_1 \alpha_2 (b + k_v) I_p}{(1 + \tilde{q}^2)^2} + \frac{2\alpha_0 \alpha_1 k_p I_p}{1 + \tilde{q}^2} \\ &+ \frac{4\alpha_1^2 k_p I_p}{(1 + \tilde{q}^2)^2} + \frac{\alpha_1^2 (b + k_v)^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \\ &+ \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \end{aligned} \quad (25)$$

Multiplicando la expresión anterior por $\frac{1 + \tilde{q}^2}{\alpha_1 I_p}$:

$$\begin{aligned} \frac{4k_p b}{I_p} + \frac{4k_p k_v}{I_p} &> 2\alpha_1 k_p - \frac{4\alpha_0 k_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)} - \frac{2\alpha_2 (b + k_v)}{1 + \tilde{q}^2} \\ &+ 2\alpha_0 k_p + \frac{4\alpha_1 k_p}{1 + \tilde{q}^2} + \frac{\alpha_1 (b + k_v)^2}{I_p (1 + \tilde{q}^2)} \\ &+ \frac{\alpha_2^2 I_p}{\alpha_1 (1 + \tilde{q}^2)} \end{aligned} \quad (26)$$

Para el determinante de la submatriz con índices {1,3}:

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{13} \\ q_{31} & q_{33} \end{vmatrix} = \frac{2\alpha_0 \alpha_1 k_i k_p}{(1 + \tilde{q}^2)(1 + \tilde{\epsilon}^2)} - \frac{\alpha_0^2 k_p^2}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)^2} - \frac{\alpha_1^2 k_i^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \quad (27)$$

A partir del determinante menor y multiplicando por el término $\frac{(1 + \tilde{q}^2)(1 + \tilde{\epsilon}^2)}{\alpha_0 \alpha_1}$ se obtiene la siguiente relación:

$$2k_i k_p > \frac{\alpha_0 k_p^2 (1 + \tilde{q}^2)}{\alpha_1 (1 + \tilde{\epsilon}^2)} + \frac{\alpha_1 k_i^2 (1 + \tilde{\epsilon}^2)}{\alpha_0} \quad (28)$$

Para el determinante de la submatriz con índices {2,3}:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} q_{22} & q_{23} \\ q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} &= \frac{4\alpha_0 k_i b}{1 + \tilde{\epsilon}^2} + \frac{4\alpha_0 k_i k_v}{1 + \tilde{\epsilon}^2} + \frac{4\alpha_0^2 k_i I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)^2} \\ &- \frac{2\alpha_0^2 k_i I_p}{1 + \tilde{\epsilon}^2} - \frac{4\alpha_0 \alpha_1 k_i I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)} \\ &+ \frac{2\alpha_0 \alpha_1 k_i I_p}{1 + \tilde{\epsilon}^2} - 4k_i^2 \\ &- \frac{4\alpha_0 (b + k_v) k_i}{1 + \tilde{\epsilon}^2} - \frac{4\alpha_2 k_i I_p}{1 + \tilde{q}^2} \\ &- 2\alpha_2 k_i I_p - \frac{\alpha_0^2 (b + k_v)^2}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)^2} \\ &- \frac{2\alpha_0 \alpha_2 (b + k_v) I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)} \\ &- \frac{\alpha_0 \alpha_2 (b + k_v) I_p}{1 + \tilde{\epsilon}^2} - \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \\ &- \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{1 + \tilde{q}^2} - \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{4} \end{aligned} \quad (29)$$

A partir del determinante menor se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha_0 k_i b}{1 + \tilde{\epsilon}^2} + \frac{4\alpha_0 k_i k_v}{1 + \tilde{\epsilon}^2} &> - \frac{4\alpha_0^2 k_i I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)^2} - \frac{2\alpha_0 \alpha_1 k_i I_p}{1 + \tilde{\epsilon}^2} \\ &+ \frac{2\alpha_0^2 k_i I_p}{1 + \tilde{\epsilon}^2} + \frac{4\alpha_0 \alpha_1 k_i I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)} \\ &+ 4k_i^2 + \frac{4\alpha_0 (b + k_v) k_i}{1 + \tilde{\epsilon}^2} + \frac{4\alpha_2 k_i I_p}{1 + \tilde{q}^2} \\ &+ 2\alpha_2 k_i I_p + \frac{\alpha_0^2 (b + k_v)^2}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)^2} \\ &+ \frac{2\alpha_0 \alpha_2 (b + k_v) I_p}{(1 + \tilde{\epsilon}^2)(1 + \tilde{q}^2)} \\ &+ \frac{\alpha_0 \alpha_2 (b + k_v) I_p}{1 + \tilde{\epsilon}^2} + \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{(1 + \tilde{q}^2)^2} \\ &+ \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{1 + \tilde{q}^2} + \frac{\alpha_2^2 I_p^2}{4} \end{aligned} \quad (30)$$

Ahora, multiplicando la expresión anterior por el término $\frac{1 + \tilde{\epsilon}^2}{\alpha_0 I_p}$:

$$\begin{aligned} \frac{4k_i b}{I_p} + \frac{4k_i k_v}{I_p} &> \frac{4\alpha_0 k_i}{1 + \hat{\epsilon}^2} - 2\alpha_1 k_i + 2\alpha_0 k_i + \frac{4\alpha_1 k_i}{(1 + \tilde{q}^2)} \\ &+ \frac{4k_i^2(1 + \hat{\epsilon}^2)}{\alpha_0 I_p} + \frac{4(b + k_v)k_i}{I_p} \\ &+ \frac{4\alpha_2 k_i(1 + \hat{\epsilon}^2)}{\alpha_0(1 + \tilde{q}^2)} + \frac{2\alpha_2 k_i(1 + \hat{\epsilon}^2)}{\alpha_0} \\ &+ \frac{\alpha_0(b + k_v)^2}{I_p(1 + \hat{\epsilon}^2)} + \frac{2\alpha_2(b + k_v)}{(1 + \tilde{q}^2)} \\ &+ \alpha_2(b + k_v) + \frac{\alpha_2^2 I_p(1 + \hat{\epsilon}^2)}{\alpha_0(1 + \tilde{q}^2)^2} \\ &+ \frac{\alpha_2^2 I_p(1 + \hat{\epsilon}^2)}{\alpha_0(1 + \tilde{q}^2)} + \frac{\alpha_2^2 I_p(1 + \hat{\epsilon}^2)}{4\alpha_0} \end{aligned} \quad (31)$$

4. Para la última condición a partir del determinante principal de la matriz Q se obtiene la ecuación (32), donde en la sección de anexos se tienen los factores correspondientes a las nuevas variables introducidas, estas sirven para poder tener una expresión compacta ya que, el resultado final del cálculo del determinante principal conlleva un gran número de términos.

$$\frac{4k_p}{I_p} > \frac{-(N_{C1}I_p^2 k_i + N_2 I_p k_i k_v + N_2 I_p k_i b + N_4 k_i^2 k_v + N_4 k_i^2 b)}{\frac{I_p}{4}(N_{C2}I_p^2 + N_1 I_p k_v + N_1 I_p b) + \frac{D}{4}(k_i(I_p k_i - N_{kikp}) + k_v N_3 k_p + b N_3 k_p)} \quad (32)$$

Con las desigualdades obtenidas a partir de todas las del criterio de Sylvester se tienen las condiciones necesarias para poder definir positiva a la matriz Q ; por lo tanto, esto demuestra que la matriz Q es definida positiva, lo que implica demostrar que la derivada de la función de energía es definida negativa. Entonces, queda demostrado que el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (8) es asintóticamente estable en forma global, conforme el tiempo evoluciona hacia infinito.

5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

A continuación, se describen los resultados de simulación, que consisten en mover el extremo final del péndulo desde la posición de casa (posición inicial) hacia la referencia de 90° . La sintonía de las ganancias se ha seleccionado para que la fase transitoria de la ecuación en lazo cerrado (8) no exhiba sobre impulsos, no oscilaciones, alcanzando en estado estacionario (converge al punto de equilibrio).

En la Figura (2) se tienen las gráficas que corresponden a los tres vectores de las variables de estado $\tilde{q}$, $\dot{\tilde{q}}$, $\hat{\epsilon}$, con una sintonización de la ganancia que toma los siguientes valores numéricos:

- $k_p = \frac{0.8\tau^{m\acute{a}x}}{1+q_d}$
- $k_v = 0.3k_p$
- $k_i = 0.01k_v$

- $m = 5 \text{ Kg}$
- $l_c = 0.01 \text{ m}$
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- $b = 0.15$
- $I_{zz} = 0.16$
- $\tau^{m\acute{a}x} = 15 \text{ Nm}$

Se puede notar que para el caso de las variables de estado correspondiente a $\tilde{q}$ y a $\dot{\tilde{q}}$ se llega a converger al punto de equilibrio como se había planteado en la sintonización de las ganancias; esto refleja el buen desempeño que presenta el sistema analizado. Por último, para la gráfica correspondiente a la variable de estado $\hat{\epsilon}$, esta converge no al valor cero como sus homólogas, si no que tiende a la constante positiva de integración la cual no es posible conocer su valor numérico a priori, solamente hasta obtener los resultados de la simulación. Cabe destacar que el comportamiento de todas las gráficas es suave y no presenta sobre impulsos o comportamiento no deseado.

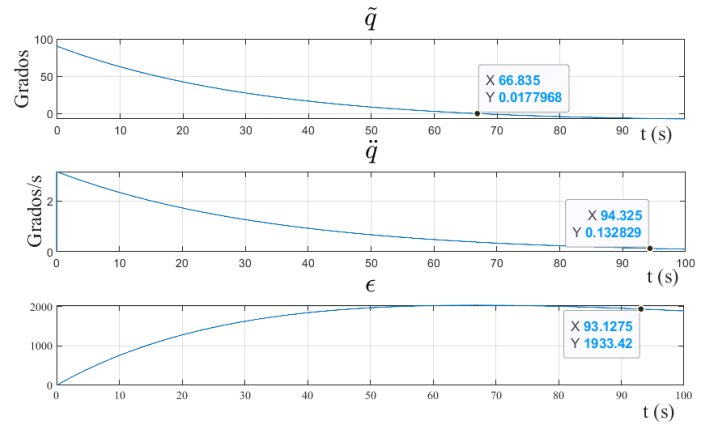


Figura 2. Simulación del sistema de lazo cerrado.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha demostrado exitosamente la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio para un sistema pendular controlado por un regulador PID lineal. El objetivo se alcanzó mediante la propuesta de una función de Lyapunov no convencional, cuya estructura con términos cruzados normalizados fue clave para sistematizar el análisis. El resultado principal de este análisis es un conjunto de condiciones suficientes, expresadas como desigualdades algebraicas, que relacionan directamente las ganancias del controlador (k_i, k_p, k_v) con los parámetros físicos del sistema. Estas condiciones no solo prueban la estabilidad, sino que también sirven como una guía para la sintonización del controlador.

Aunque el análisis se centró en un sistema de un grado de libertad, la metodología aquí presentada establece una base sólida para abordar el problema abierto en sistemas más

complejos. Los trabajos futuros se enfocarán en extender esta estructura de Lyapunov a robots manipuladores de n grados de libertad y explorar su aplicabilidad en el diseño de nuevas leyes de control no lineal, con el fin de mejorar el desempeño y la robustez de los sistemas robóticos.

7. REFERENCIAS

- [1] Ortega, Romeo and Romero, Jose Guadalupe and Borja, Pablo and Donaire, Alejandro. PID Passivity-Based Control of Nonlinear Systems with Applications. IEEE Press Wiley, 2021.
- [2] Adriana Salinas, Javier Moreno and Rafael Kelly. A Family of Nonlinear PID-Like Regulators for a Class of Torque-Driven Robot Manipulators Equipped with Torque-Constrained Actuators. Advances in Mechanical Engineering, Vol. 8, No. 2, pp. 1–14, 2016.
- [3] Marco Mendoza, Arturo Zavala, Víctor Santibáñez and Fernando Reyes. Output-Feedback Proportional Integral Derivative Type Control with Simple Tuning for the Global Regulation of Robot Manipulators with Input Constraints. The Institution of Engineering and Technology, pp. 1–10, 2015.
- [4] Chandan Choubey and Jyoti Ohri. Tuning pf LQR-PID controller to control parallel manipulator. Neural Computing and Applications. No. 34. pp. 3283-3297. 2022.
- [5] Spong, M. W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. Robot Modeling and Control. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto. 2006.
- [6] R. Kelly y Víctor Santibáñez y Control de movimiento de Robots Manipuladores. Prentice-Hall, 2003.
- [7] R. Fernando. Robótica. Control de robots manipuladores. Segunda Edición. Alfaomega Grupo Editor. 2024. 512-521.
- [8] Ogata, K. Ingeniería de Control Moderna. Capítulo 6: Análisis y diseño de sistemas de control por retroalimentación. 2010.
- [9] Franklin, G. F., Powell, J. D., & Emami-Naeini, A. Feedback Control of Dynamic Systems. Chapter 4: PID Control. 2014.
- [10] Rui Xiong, Lijing Li, Chunxi Zhang, Kun Ma, Xiaosu Yi, Huasong Zeng, "Path Tracking of a Four-Wheel Independently Driven Skid Steer Robotic Vehicle Through a Cascaded NTSM-PID Control Method", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol.71, pp.1-11, 2022.
- [11] Alexander Stadnik, Sergii Podlesny, Svitlana Kaporovych, Oleksii Kabatskyi, "Spatial transportation of the beam on a bifilar fastening", *FME Transactions*, vol.50, no.3, pp.548, 2022.
- [12] R. E. García-Ferral, F. Reyes-Cortés and B. Sánchez-García, "Design of a control algorithm for a robot manipulator with constant gains," 2021 XVII International Engineering Congress (CONIIN), Queretaro, Mexico, 2021, pp. 1-7, doi: 10.1109/CONIIN54356.2021.9634741.
- [13] Fawaz E. Alsaadi, Stelios Bekiros,
- [14] Robust PID sliding-surface control for nonholonomic pendulum-driven spherical robots in the presence of nonlinear perturbations and uncertainty shocks, *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 191, 2025.

8. ANEXOS

A continuación, se presentan los valores correspondientes a las nuevas variables auxiliares empleadas en el determinante principal:

$$D = 2(1 + \epsilon^2)^3(1 + \tilde{q}^2)^3$$

$$N_{C1} = -(4\alpha_0\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2) + (8\alpha_0\alpha_2 + 18\alpha_1\alpha_2)\epsilon^2 + (4\alpha_0\alpha_2 + 18\alpha_1\alpha_2)\epsilon^4 + 6\alpha_1\alpha_2\epsilon^6 + (4\alpha_0\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2)\tilde{q}^2 + (8\alpha_0\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2)\epsilon^2\tilde{q}^2 + (4\alpha_0\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2)\epsilon^4\tilde{q}^2 + 2\alpha_1\alpha_2\epsilon^6\tilde{q}^2)$$

$$N_{C2} = -((6\alpha_0\alpha_2 + 9\alpha_1\alpha_2) + (12\alpha_0\alpha_2 + 27\alpha_1\alpha_2)\epsilon^2 + (6\alpha_0\alpha_2 + 27\alpha_1\alpha_2)\epsilon^4 + 9\alpha_1\alpha_2\epsilon^6 + (8\alpha_0\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2)\tilde{q}^2 + (2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2)\tilde{q}^4 + (16\alpha_0\alpha_2 + 18\alpha_1\alpha_2)\epsilon^2\tilde{q}^2 + (4\alpha_0\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2)\epsilon^2\tilde{q}^4 + (8\alpha_0\alpha_2 + 18\alpha_1\alpha_2)\epsilon^4\tilde{q}^2 + (2\alpha_0\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2)\epsilon^4\tilde{q}^4 + 6\alpha_1\alpha_2\epsilon^6\tilde{q}^2 + \alpha_1\alpha_2\epsilon^6\tilde{q}^4)$$

$$N_{k_ik_p} = (4\alpha_0\alpha_1 - 4\alpha_0\alpha_1\tilde{q}^2 - 8\alpha_0\alpha_1\tilde{q}^4) + (4\alpha_0\alpha_1 - 8\alpha_0\alpha_1\tilde{q}^2 - 4\alpha_0\alpha_1\tilde{q}^4)\epsilon^2 + (4\alpha_0\alpha_1 - 8\alpha_0\alpha_1\tilde{q}^2 - 4\alpha_0\alpha_1\tilde{q}^4)\epsilon^4 + (4\alpha_0\alpha_1\tilde{q}^2 - 4\alpha_0\alpha_1)\epsilon^6 + (8\alpha_0\alpha_2 + 16\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^2 + 8\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^4) + (16\alpha_0\alpha_2 + 32\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^2 + 16\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^2 + (8\alpha_0\alpha_2 + 16\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^2 + 8\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^4 + (24\alpha_1\alpha_2 + 32\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2 + 8\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^4) + (72\alpha_1\alpha_2 + 96\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2 + 24\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^2 + (72\alpha_1\alpha_2 + 96\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2 + 24\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^4 + (24\alpha_1\alpha_2 + 32\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2 + 8\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^6$$

$$N_1 = (4\alpha_0\alpha_2 + 8\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^2 + 4\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^4) + (8\alpha_0\alpha_2 + 16\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^2 + 8\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^2 + (4\alpha_0\alpha_2 + 8\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^2 + 4\alpha_0\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^4 + (6\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2 + 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^4) + (12\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 16\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^2 + (6\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2 + 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^4)\epsilon^4)$$

$$N_2 = (6\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2) + (18\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2)\epsilon^2 + (18\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2)\epsilon^4 + (6\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2)\epsilon^6 + (4\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2) + (8\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2)\epsilon^2 + (4\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_0\alpha_1\alpha_2\tilde{q}^2)\epsilon^4)$$

$$N_3 = (4\alpha_0 + 12\alpha_0\tilde{q}^2 + 12\alpha_0\tilde{q}^4 + 4\alpha_0\tilde{q}^6) + (12\alpha_0 + 12\alpha_0\tilde{q}^2 - 12\alpha_0\tilde{q}^4 + 4\alpha_0\tilde{q}^6)\epsilon^2 + (12\alpha_0 + 12\alpha_0\tilde{q}^2 - 12\alpha_0\tilde{q}^4 + 4\alpha_0\tilde{q}^6)\epsilon^4 + (4\alpha_0 + 12\alpha_0\tilde{q}^2 + 12\alpha_0\tilde{q}^4 + 4\alpha_0\tilde{q}^6)\epsilon^6)$$

$$N_4 = (4\alpha_1)(1 + \tilde{q}^2)^2 + (12\alpha_1)(1 + \tilde{q}^2)^2\epsilon^2 + (12\alpha_1)(1 + \tilde{q}^2)^2\epsilon^4 + (4\alpha_1)(1 + \tilde{q}^2)^2\epsilon^6)$$