

LA DISCONTINUIDAD DESDE UN PUNTO DE VISTA NATURAL

Andrés González Rodríguez¹, Rogelio E. Baray Arana²

¹Universidad Nacional Autónoma de México / Facultad de Ingeniería
C.U., Coyoacán, 04510 Ciudad de México, CDMX angler@comunidad.unam.mx

²Tecnológico Nacional de México/ Instituto Tecnológico de Chihuahua División de Posgrado e
Investigación
Av. Tecnológico 2902
Tel., (52) 614 201 2000
rogelio.ba@chihuahua.tecnm.mx

RESUMEN.

El control por modos deslizantes (SMC por sus siglas en inglés) es una técnica de control altamente robusta con la capacidad de compensar perturbaciones e incertidumbres de manera exacta. La propiedad de robustez es una consecuencia de los términos discontinuos en la ley de control. Es razonable pensar que una acción de control discontinua puede ser extraña, artificial o abrupta para controlar un sistema dinámico. Sin embargo, como se expone en este artículo, en la naturaleza no es complicado encontrar sistemas dinámicos con términos discontinuos, por ejemplo, la fricción seca. De esta manera el presente artículo contextualiza una señal de control discontinua en la perspectiva de fricción seca. En este artículo se presentan los resultados experimentales para validar los resultados teóricos.

Palabras Clave: Tiempo finito, fricción seca, control discontinuo.

ABSTRACT.

The classic sliding mode control (CSMC) is a highly robust control technic capable of exact compensation of matched perturbations and uncertainties. The property of robustness is a consequence of the discontinuous term in the CSMC. It is reasonable to think that a discontinuous control action can be odd, artificial or even an abrupt manner to control a dynamic system. However, as the paper will expose, in nature, dynamic models with discontinuous terms are not difficult to find, e.g., dry friction. Thus, the following paper deals with a discontinuous control law in the perspective of dry friction. Experimental validation will be presented in the paper to demonstrate the theoretical analysis.

Keywords: Finite time, dry friction, discontinuous control

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad el uso de técnicas de control precisas, han sido de vital importancia en diferentes áreas como procesos industriales, académicos, militares, médicos, etc. Dicha precisión

se encuentra atada a la robustez que el controlador es capaz de soportar cuando incertidumbres paramétricas o perturbaciones exógena existen en el modelo dinámico [1]. Una técnica altamente robusta para sistemas de grado relativo uno es el CSMC [2]. El CSMC tiene la propiedad de compensar exactamente perturbaciones e incertidumbres paramétricas acopladas. Esto implica no solo que el estado converge al origen si no que lo hace en tiempo finito [3]. Dentro de la literatura de CSMC, estos controladores han avanzado hacia sistemas de grado relativo arbitrario denominados control por modos deslizantes de orden superior [4]. Además han sido contextualizados para observación [5], [6] y diferenciación [7].

La gran robustez del CSMC proviene de las propiedades discontinuas en la ley de control. Sin embargo, en la práctica usar discontinuidades viene con una gran desventaja, el “chattering”. El fenómeno del “chattering” produce oscilaciones de alta frecuencia en la señal de control ocasionando altas vibraciones en el sistema dinámico. Esto puede dañar o en el peor de los casos destruir el equipo físico.

El fenómeno del “chattering” lleva a pensar al ingeniero de control que el SMC es una forma artificial o agresiva de resolver un problema de estabilización. Sin embargo, la discontinuidad es un fenómeno natural que se presenta en la fricción seca de cualquier sistema mecánico.

Partiendo de esta idea, el siguiente artículo presenta un análisis teórico y experimental de la discontinuidad, desde un punto de vista natural. La contribución del artículo es la siguiente:

- Hacer una comparación teórica entre un sistema mecánico con fricción viscosa y otro con fricción seca.
- Extender la idea de fricción seca a un sistema eléctrico.
- Diseñar experimentos que muestren las ideas propuestas sobre términos discontinuos en un modelo dinámico eléctrico.

En el artículo las soluciones de las ecuaciones diferenciales se entienden en el sentido de Filippov [8].



Figura 1: Sistema mecánico

Notación: $K\text{sign}(x)$ con $K > 0$ es definida como $\text{sign}(x) = K$ si $x > 0$, $\text{sign}(x) = -K$ si $x < 0$ y $\text{sign}(0) = [-1, 1]$. \mathbb{R} es el conjunto de los números reales. Sean dos conjuntos A y B el conjunto $C = A \setminus B$ es el conjunto de la diferencia de elementos de A y B .

2. EJEMPLO MOTIVACIONAL: SISTEMA MECÁNICO

Considere el sistema mecánico presentado en la figura 1.

Haciendo un diagrama de fuerzas se tiene

$$\rightarrow_+ \Sigma F = ma = F_I \Rightarrow a = \frac{1}{m}F_m - \frac{1}{m}F_f \quad (1)$$

donde F , m y a son las fuerzas, masa y aceleración del objeto mecánico respectivamente. F_m es una fuerza externa causada por un actuador, F_f es la fuerza de fricción y F_I es la oposición inercial de la partícula. La notación \rightarrow_+ hace referencia a la positividad de las fuerzas y a en el sentido donde el objeto se está moviendo.

2.1 Fricción Viscosa

En el sentido clásico, la fricción es lineal con la velocidad, esto es $F_f = bq$, donde $b > 0$ es la constante de viscosidad y q es la velocidad del objeto mecánico. Al utilizar este modelo de fricción y escribir (1) en su representación de espacio de estados, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (2)$$

Donde $x_1 = p$, $x_2 = \dot{q}$ y $u = F_m$, siendo p la posición del objeto mecánico.

Observación 1 El sistema (1) es controlable, esto es, la matriz de controlabilidad $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m} & -\frac{b}{m^2} \end{bmatrix}$ es no singular.

Considere el sistema (1) no forzado, esto es, $u = 0$. La solución de (1) es dada por

$$x = e^{-At}x(0) \quad (3)$$

Con $x = [x_1 \quad x_2]^T$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$, $x(0) = [x_{10} \quad x_{20}]^T$,

donde x_{10} y x_{20} son las condiciones iniciales de la posición y velocidad del sistema mecánico.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2(1 - e^{-t}) \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Considere $b = 1$, $m = 1$ y $x(0) = [1 \quad 2]$ entonces la solución explícita de (3) será

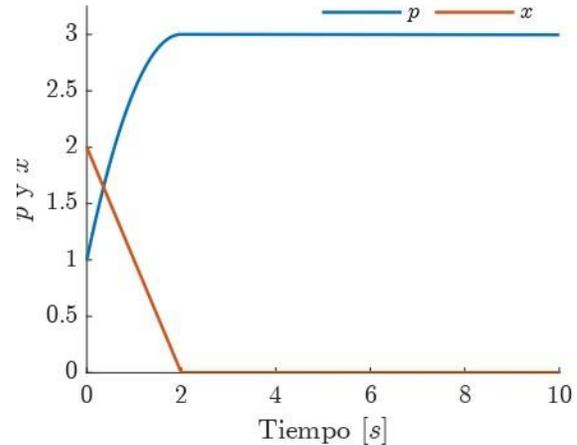


Figura 2. Gráfica de estados de (2).

nótese que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = [3 \ 0]^T$, esto quiere decir que hasta que el tiempo tienda a infinito, la velocidad x_2 del sistema mecánico llegará a cero. Para ver esto se realiza una simulación del sistema (2) y se muestra en la figura 2.

De la figura 2 se construye una tabla de los diferentes valores de x_2 a diferentes tiempos. Esta información se encuentra en la tabla 1

Tabla 1. Valores de tiempo y velocidad para fricción viscosa.

t	$x_2(t)$
2.5	0.1639
5	0.01344
7.5	0.001102
10	0.0000903

Si más valores del tiempo se añadieran en la tabla 1, el valor de la velocidad se haría más pequeño pero llegaría a cero en el límite lo cual no es posible de hacer en una computadora. Sin embargo, esto nunca ocurre en la vida real. Todos los automóviles que tengan cierta velocidad se frenan si no existe una fuerza externa que los impulse. Si uno lanza una pelota en el piso esta va a frenarse en algún momento. Lo que muestra la solución (3), la figura 2 y la tabla 1, es que la pelota o el automóvil avanzarían con una velocidad menor pero siempre con una cierta velocidad. Pero esto no ocurre en la realidad **¿por qué?** Esta pregunta se contestará en la siguiente subsección.

2.2 Fricción seca

En el ejemplo anterior la fricción F_f fue modelada de manera lineal. Sin embargo, un modelo más aproximado es la fricción

seca dado por $F_f = u_k \text{sign}(q)$, donde $u_k > 0$ es la constante de fricción seca. Algo a notar en el modelo de la fricción seca es la discontinuidad cuando la velocidad es cero. La discontinuidad aparece cuando la velocidad cambia de signo, inmediatamente lo hace la dirección de la fricción seca, oponiéndose al movimiento del cuerpo en estudio. Esto hace un modelo de fricción más coherente físicamente comparado con el modelo de la fricción viscosa.

Considerar el sistema mecánico de la figura 1 con el modelo de la fricción seca. El espacio de estados con respecto a la velocidad, es decir, $x = q$, esta dado por

$$\dot{x} = -\frac{u_k}{m} \text{sign}(x) + \frac{1}{m} u \quad (4)$$

Para realizar un análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov del sistema (4) se usará el análisis de Lyapunov, debido a que el sistema (4) es no lineal y discontinuo. El análisis es dado con $u = 0$, y esta descrito de la siguiente forma. Considere la siguiente función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} V^2 \quad (5)$$

La derivada temporal de (5) a lo largo de las trayectorias de (4) es dada por

$$\dot{V} = x\dot{x} = -u_k|x|$$

Por lo que

$$\dot{V} = -\sqrt{2}u_k V^{1/2} \quad (6)$$

Usando el Lema 1 del Apéndice en la ecuación (6) se tiene que $\beta = \sqrt{2}u_k > 0$ y $\alpha = \frac{1}{2} \in (0,1)$. Por lo que el origen del sistema mecánico (4) es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito. Resolviendo la ecuación diferencia (6), se tiene un tiempo de

$$t = \frac{2}{\sqrt{2}u_k} \left(V(x(0)) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{|x(0)|}{u_k} \quad (7)$$

Se realizó una simulación del sistema (4), para mostrar el comportamiento del modelo mecánico en presencia de fricción seca. La simulación es idéntica que la anterior con $u_k = 1$. La posición p se obtiene al integrar la velocidad $x = q$. El tiempo de convergencia a 0 de x es dado por la ecuación (7), esto es, $t = 2$ seg. Los resultados numéricos se muestran en la figura 3. Para comprobar el tiempo finito en la simulación, la tabla 2 muestra diferentes valores de x para diferentes tiempos.

La figura 3 y tabla 2 muestran que en $t = 2$ se tiene $x(t) \approx 0$ para todo $t > T$. Esto no ocurre en los resultados obtenidos cuando la fricción es modelada de manera lineal donde x nunca llega a cero. Esto muestra que el modelar con mayor realismo la fricción se obtienen resultados más cercanos a la realidad.

En la siguiente sección se verá cómo aprovechar la discontinuidad para hacer que un circuito RC se descargue en tiempo finito.

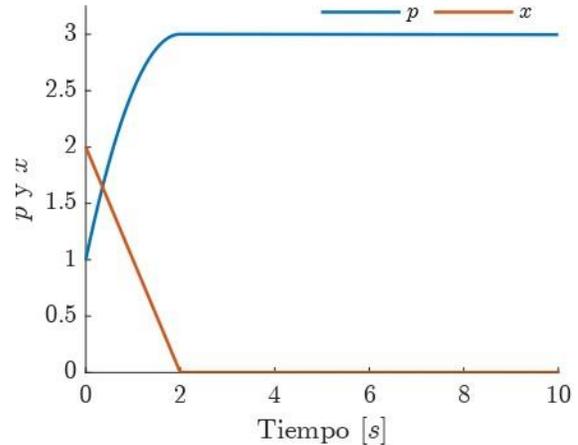


Figura 3. Gráfica de los estados de (4).

Tabla 2. Valores de tiempo y velocidad para fricción seca.

t	$x(t)$
1	1
2	0.000000000000109
5	0.000000000000109
10	0.000000000000109

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere el siguiente sistema eléctrico mostrado en la figura 4. Usando la ley de voltajes de Kirchhoff se tiene

$$v(t) = Ri(t) + v_c(t) = RCv_c(t) + v_c(t) \quad (8)$$

Donde $v(t)$ es el voltaje de alimentación del circuito, R es la resistencia eléctrica, $v_c(t)$ es el voltaje del capacitor e $i(t)$ es la corriente eléctrica. Note que en la teoría clásica de circuitos se tiene que $i(t) = C\dot{v}_c(t)$ [9].

Al examinar la ecuación (8), no existe un término discontinuo natural, esto es, modelar la caída de voltaje en la resistencia o en el capacitor como un término discontinuo al menos físicamente carece de sentido. Sin embargo, la entrada de voltaje $v(t)$ se tiene a la mano. Por lo que $v(t)$ se usará como una entrada de control discontinua.

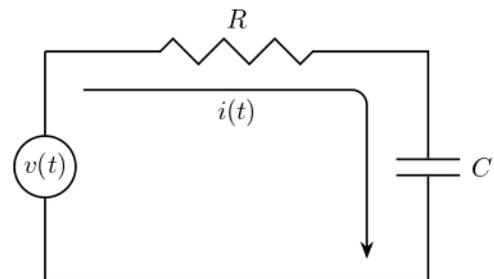


Figura 4. Circuito RC.

4. RESULTADOS TEÓRICOS

El sistema eléctrico (8) se escribe en espacio de estados de la forma

$$\dot{x} = -g(x - u(t)) \quad (9)$$

Donde $x = v_c(t)$, $u = v(t)$ y $g = 1/RC$. Considere el control en la forma

$$u = -K\text{sign}(x) + x, \quad K > 0 \quad (10)$$

Se dará paso al resultado principal del artículo.

Teorema 1 Considerar el lazo cerrado (9)-(10). El origen de la solución del lazo cerrado $x = 0$, es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito.

Prueba. El lazo cerrado (9)-(10) está dado por

$$\dot{x} = -gK\text{sign}(x) \quad (11)$$

La función de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x^2$ cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (9) es dada por

$$\dot{V} = x\dot{x} = -gK|x|,$$

Se tiene

$$\dot{V} = -\sqrt{2}gKV^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Invocando el Lema 1 la ecuación (12) cumple con $\beta = \sqrt{2}gKV > 0$ y $\alpha = \frac{1}{2} \in (0,1)$, por lo que el origen de (9) es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito, con un tiempo de convergencia de $t = \frac{|x(0)|}{gK}$.

5. DISEÑO ELECTRÓNICO PARA LA APLICACIÓN DEL CONTROLADOR

El objetivo del experimento es demostrar que el origen del lazo cerrado (9)-(10) es estable en tiempo finito. Con esto en mente, se usa un circuito RC físico como una planta representado en la figura 4. El esquema de control (10) es implementado en un PIC18F26K20 junto con un circuito electrónico para el acondicionamiento de las señales. La información del PIC18F26K20 se encuentra en [11]. El esquema del circuito electrónico se muestra en la figura 5 con la notación V_1 , V_2 y V_3 , esto hace referencia a voltaje obtenido de los potenciómetros. Los valores son $V_1 = -1.54V$, $V_2 = -1.59V$ y $V_3 = 1.44V$. Los valores de las resistencias y capacitores se muestran en la tabla 3. El PIC18F26K20 tiene un voltaje de alimentación de 3.2V, mientras que los amplificadores operacionales manejan un voltaje positivo de 10V y negativo de -10V. Los amplificadores operacionales usados son TL082, excepto los amplificadores operacionales inversores, los cuales son TL081. El PIC18F26K20 trabaja a una frecuencia de 64MHz y la frecuencia de muestreo aproximada del esquema de control es de 16MHz.

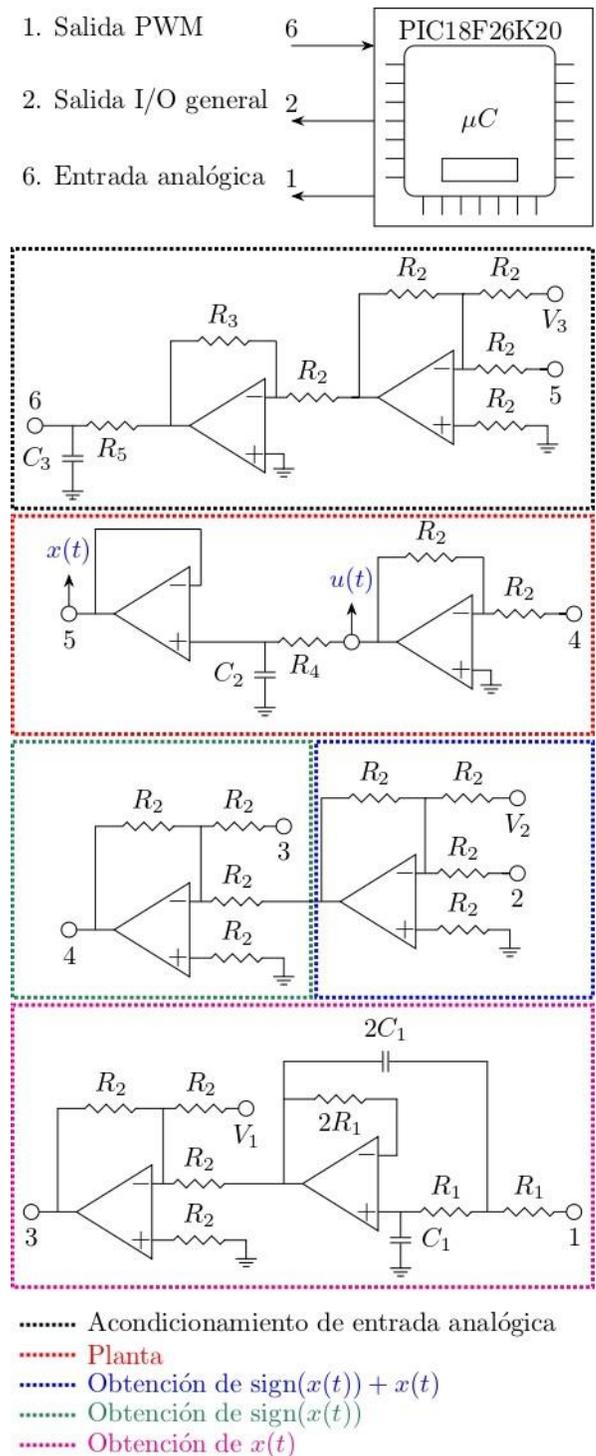


Figura 5. Circuito electrónico para la implementación del controlador.

Tabla 3. Valores de resistencias y capacitancias del circuito electrónico

Elemento	Valor
R ₁	47kΩ
R ₂	2.2kΩ
R ₃	1.2kΩ
R ₄	10MΩ
R ₅	1.2Ω
C ₁	22nF
C ₂	0.1μF
C ₃	47nF

El circuito electrónico fue necesario ya que las salidas y entradas del PIC18F26K20 son de voltaje positivo. Sin embargo, la ley de control (10) requiere de voltajes negativos para su término discontinuo y su termino lineal. Además, es necesario acondicionar la entrada analógica del PIC18F26K20 ante ruidos y voltajes negativos. Esto llevó a diseñar un circuito electrónico para no dañar el microcontrolador. El circuito electrónico está dividido en 5 etapas descritas a continuación.

- *Obtención de $x(t)$.* El PIC18F26K20 no cuenta con un convertidor digital-análogo, pero si con salidas PWM. Para obtener la señal de corriente directa se diseño un filtro pasa bajas de segundo orden analógico con una frecuencia de corte de 100Hz. Ya que el PWM del PIC18F26K20 esta configurado a una frecuencia mayor de 15kHz, la frecuencia de corte esta muy alejada de ell, obteniendo así la componente directa de la señal PWM. Sin embargo, la componente de directa solo puede ser positiva, por lo que se uso un sumador para centrar el voltaje de corriente directa sumándole el voltaje negativo V_1 , dando como resultado voltajes positivos y voltajes negativos.
- *Obtención de $\text{sign}(x(t))$.* Para la implementación de la función $\text{sign}(\cdot)$, se uso una salida genérica del PIC18F26K20. La parte negativa del signo se obtiene al sumar la salida genérica con el voltaje negativo V_2 mediante un sumador analógico.
- *Planta.* La planta consta de un circuito RC con sus valores descritos en la tabla 3. Sin embargo, a la entrada del circuito entra el sumador que tiene la señal de control, pero esta señal viene negada. La obtención del signo correcto es mediante un amplificador inversor con resistencias del mismo valor. De esta forma se obtiene el signo del control correspondiente y se administra a la planta, esto es, el circuito RC. Por último, la señal que proviene del voltaje del capacitor se introduce en un seguidor de voltaje ya que la caída de voltaje proveniente de la resistencia es de gran valor. Con esto se obtiene $x(t)$, esto es, el voltaje del capacitor, en la salida del seguidor de voltaje. Las señales $x(t)$ y $u(t)$ son medidas con un osciloscopio Tektronix TDS 2014C y los datos son recopilados mediante una memoria USB.

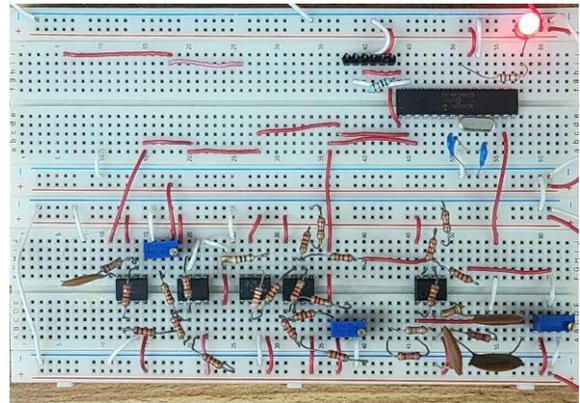


Figura 6. Circuito físico.

- *Acondicionamiento de la entrada analógica.* Ya que el PIC18F26K20 no puede leer entradas de voltaje negativo, a la salida de la planta $x(t)$ se le suma el voltaje V_3 con un sumador analógico pero debido a que el sumador entrega la señal negada se corrige con un amplificador inversor. El amplificador inversor tiene dos resistencias de diferente tamaño, esto es, para que el voltaje analógico que entre al PIC18F26K20 no sea el total que el PIC18F26K20 puede manejar evitando problemas de saturación. Las resistencias tienen un valor de $R_2=2.2k\Omega$ y $R_3=1.2k\Omega$, esto hace que el amplificador inversor tenga una atenuación de 0.5455. Debido al ruido proveniente de los amplificadores operacionales, se usa un circuito RC para atenuar los picos tener una mejor lectura en el PIC18F26K20.

El circuito físico se muestra en la figura 6. En el diseño del circuito electrónico existen dos dinámicas no contempladas en el análisis. La primera es el filtro pasa bajas de segundo orden ya la segunda es el circuito RC, esto es, un filtro pasa bajas de primer orden para amortiguar picos en la entrada analógica del PIC18F26K20. La función de transferencia del filtro pasa bajas de segundo orden esta dada por

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{2R_1^2 C_1^2}}$$

Donde s es la variable de Laplace, V_o es la salida del filtro y V_i es la entrada, en este caso el PWM del PIC18F26K20. El tiempo de asentamiento t_s de la respuesta transitoria para un criterio de 2% está dado por

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}, \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2} R_1 C_1}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donde ω_n es la frecuencia natural del sistema y ζ el factor de amortiguamiento. Sustituyendo los valores de la tabla 3, el tiempo de asentamiento es dado por $t_{s1} = 8.27ms$. El tiempo de

asentamiento del filtro pasa bajas de primer orden que se encuentra antes de la entrada analógica del PIC18F26K20 es dado por $t_{s2} = 0.2256\mu s$. La planta en cambio tiene un tiempo de asentamiento de $t_{s3} = 4s$. Por lo que el tiempo de asentamiento de la planta a controlar es 483.68 veces más grande que el tiempo de asentamiento del filtro pasa bajas de segundo orden. Esto implica que la dinámica del filtro pasa bajas de segundo orden y del filtro de primer orden se pueden considerar como perturbaciones singulares y por lo tanto no afectan el análisis teórico realizado anteriormente.

5.1 Discusión del circuito electrónico

El circuito electrónico diseñado y mostrado en la figura 5, permite sumar los dos términos en la ley de control (10) mediante electrónica analógica. Esto se realiza mediante dos salidas del microcontrolador siendo una la salida PWM y otra una salida genérica del microcontrolador. Aunque la salida PWM podría llevar ambos términos, al momento de pasarla por el filtro pasa bajas de segundo orden, el término discontinuo se filtraría y esto daría paso al control equivalente dentro de la discontinuidad, vea [2]. Ya que el objetivo del artículo es usar la discontinuidad y no una aproximación de ella en la aplicación, se optó por este método. Un diseño más eficiente es usar un microcontrolador o un aditamento al PIC18F26K20 que tenga convertidores digital-análogo.

6. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El experimento consistió en dos pasos:

1. Medir el voltaje del capacitor cuando no existe ley de control en el circuito RC.
2. Medir el voltaje del capacitor y la señal de control (10) suministrada al circuito RC.

En ambos pasos el voltaje del capacitor inicia con un voltaje de $v_c(0) = x_0 = 1.52V$. Los resultados obtenidos de ambos casos se pueden ver en la figura 7. En la parte superior de la figura 7 se muestra el comportamiento del circuito RC con $u(t) = 0$, por lo que el sistema (9) quedaría de la forma $\dot{x} = -gx$, cuya solución está dada por

$$x(t) = x_0 e^{-gt}$$

para calcular el tiempo en que $x(t) = 0$ se tiene que hacer una aproximación ya que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Ya que 0 no es posible por el límite, se utiliza un valor de $x(t) = 0.1$, dando un tiempo de $t = 2.72s$. En el cálculo se considera una resistencia $R_4 = 10.5M\Omega$ y una capacitancia de $C_2 = 95.3nF$, estos valores se obtienen al medir los elementos del circuito. En el experimento esto da un tiempo de $t = 2.8seg$. Sin embargo, conocer el tiempo exacto es imposible, solo se podrían hacer aproximaciones del tiempo para valores más pequeños de $x(t)$.

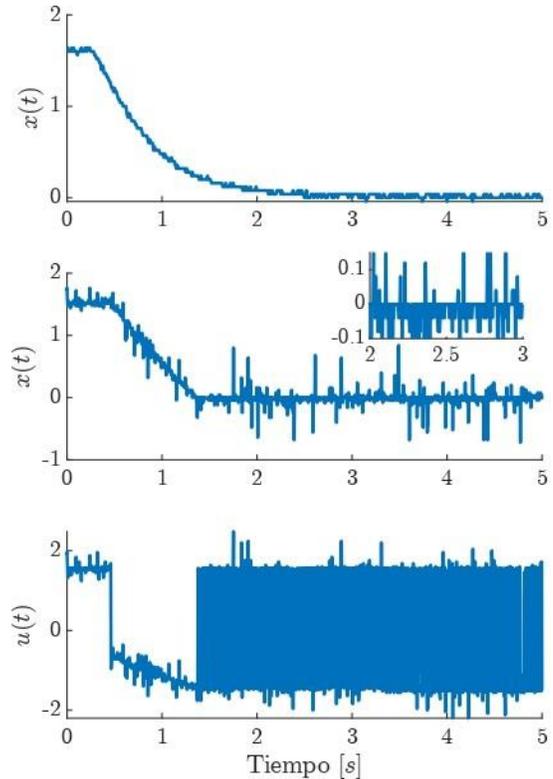


Figura 7. Resultados experimentales; (superior) voltaje del capacitor sin ley de control, (centro) voltaje del capacitor con la ley de control (10); (inferior) ley de control (10).

El centro y el inferior de la figura 7 muestra el voltaje del capacitor y la ley de control (10) aplicada al circuito RC. Al comparar el centro y la parte superior de la figura 7 se observa que la dinámica del voltaje del capacitor es diferente. Para el caso no forzado es un exponencial, pero para el caso en que el control (10) está presente, la solución tiene cierta apariencia de línea recta. Para explicar esto se tiene la función de Lyapunov para el sistema (9) de forma $V = \frac{1}{2}x^2$, con su derivada temporal

$\dot{V} = -\sqrt{2}gKV^{1/2}$. Al sustituir estos datos en (14) del Lema 1, se tiene

$$x(t) = x_0 - gKt \quad (13)$$

Donde la ecuación (13) es la ecuación de una línea recta con pendiente negativa explicando el comportamiento dinámico del voltaje del capacitor con la ley de control (10). Para conocer el tiempo en que $x(t) = 0$ se usa la ecuación (13) usando los valores de resistencia y capacitancia medidos y con una ganancia $K = 1.56$ dada por el PIC18FK26K20. Al realizar el cálculo se tiene un $t = 0.975s$. Al realizar la medición del tiempo en la parte inferior de la figura desde que inicio el control hasta donde inicia el modo deslizante, esto es, la alta frecuencia de conmutación vista en el inferior de la figura se tiene un tiempo de $t = 0.915$. El cálculo demuestra la ventaja de usar el controlador ya que presenta un error de 0.06s, esto es se puede calcular el

tiempo exacto en que la solución $x(t)$ llega a cero. Por último, la parte inferior de la figura 7 muestra la señal de control. Debido al término discontinuo se presenta el fenómeno del *chattering*, lo cual no es de sorpresa ya que es la desventaja que tienen este tipo de controladores.

7. CONCLUSIONES

El presente artículo revelo que el uso de términos discontinuos en las leyes de control no es una forma abrupta de resolver un problema de control, si no, que las discontinuidades están presentes en sistemas dinámicos, como ejemplo, un sistema mecánico con fricción seca. Se analizó un sistema mecánico con fricción viscosa y con fricción seca y se observo que en el caso de fricción seca la velocidad tiene un punto de equilibrio estable en tiempo finito. Usando esta idea, se diseño una ley de control para que el lazo cerrado de un sistema eléctrico, esto es, un circuito *RC*, tuviera un punto de equilibrio estable en tiempo finito, es decir, que fuera posible calcular el tiempo exacto cuando $x(t) = 0$, lo cual no es posible cuando el circuito *RC* se descarga de forma natural. Además, en el trabajo de investigación se observo que aunque el controlador fuera sencillo en la teoría, en la práctica se requirió cierto grado de complejidad a nivel ingeniería para aplicarlo. El artículo presento experimentos físicos para validar los resultados teóricos.

8. REFERENCIAS

- [1] H.K. Khalil. Nonlinear Systems. Pearson Education. Prentice Hall, 2002.
- [2] V. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. IEEE Transactions on Automatic Control, 22(2):212–222, 1977.
- [3] S.P. Bhat and D.S. Bernstein. Lyapunov analysis of finite-time differential equations. In Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95, volume 3, pages 1831–1832 vol.3, 1995.
- [4] Arie Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. International Journal of Control, 76(9-10):924–941, 2003.
- [5] Christopher Edwards, Sarah K. Spurgeon, and Chee Pin Tan. On the Development and Application of Sliding Mode Observers, pages 253–282. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [6] Jorge Davila, Leonid Fridman, and Arie Levant. Secondorder sliding-mode observer for mechanical systems. IEEE transactions on automatic control, 50(11):1785–1789, 2005.
- [7] Arie Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. Automatica, 34(3):379–384, 1998.
- [8] Aleksei Fedorovich Filippov. Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems, volume 18. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] C.K. Alexander and M.N.O. Sadiku. Fundamentals of Electric Circuits. McGraw-Hill Higher Education, 2007.
- [10] Sanjay P Bhat and Dennis S Bernstein. Finite-time stability

of continuous autonomous systems. SIAM Journal on Control and optimization, 38(3):751–766, 2000.

9. APÉNDICE

Lema 1 Considerar un sistema descrito de la forma $\dot{x} = f(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$ y una función $V : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ y $V(x) = 0$ si y solo si $x = 0$. Si $\dot{V}(x(t)) = \frac{dV}{dx} \dot{x} = -\beta V^\alpha$, con $\beta > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces el origen del sistema \dot{x} es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito.

Prueba. Para probar que el origen de (11) es un punto de equilibrio estable en tiempo finito, es necesario dos condiciones:

1. El origen del lazo cerrado sea un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov.
2. Exista $T(x) : D \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ y $\gamma(t) : [0, T(x)] \rightarrow D$, tal que $\lim_{t \rightarrow T(x)} \gamma(t) = 0$

para mayor información vea [10].

La primera condición se cumple por la definición dada de $V(x)$, esto es, $V > 0$ y $\dot{V} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $V(x) = \dot{V}(x) = 0$ únicamente si $x = 0$. Por lo que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lyapunov, vea la definición 4.1 y el Teorema 4.1 en el capítulo 4 de [1].

La solución de la ecuación diferencial $\dot{V}(x(t)) = -\beta V^\alpha$ esta dada por

$$\int_{V(x_0)}^{V(t)} \frac{dV}{V^\alpha} = -\beta t$$

Note que el limite inferior de la integral $V(x_0)$ depende de la condición inicial $x_0 = x(0)$ del sistema $\dot{x} = f(x)$. Por lo que V depende de cierto valor de x , entonces, en este contexto, $V(x_0) = V(x)$. La solución de la integral es

$$\frac{(V(t))^{(1-\alpha)}}{1-\alpha} = \frac{(V(x))^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -\beta t \quad (14)$$

Se tiene

$$V(t) = \left[\beta(1-\alpha) \left(\frac{(V(x))^{(1-\alpha)}}{\beta(1-\alpha)} - t \right) \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\gamma(t) = [\beta(1-\alpha)(T(x) - t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Note que $\lim_{t \rightarrow T(x)} \gamma(t) = 0$, por lo que se cumple la condición dos, y el origen del sistema \dot{x} es un punto de equilibrio estable en tiempo finito. Para comprobar que es global, por la definición de $V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $D = \mathbb{R}$ y por lo tanto el origen de \dot{x} es un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito. \square