

CONTROL PROPORCIONAL RETARDADO CON COMPENSACIÓN NO LINEAL APLICADO A UN PÉNDULO SIMPLE

Catarino-Aguilar Octavio¹, Ojeda-Misses Manuel Alejandro², Martines-Arango Hilario³, López-Morales Virgilio², Franco-Árcega Anilú², García Islas Luis Heriberto², Miranda-García Brenda¹

¹Tecnológico Nacional de México, Tecnológico de Estudios Superiores de San Felipe del Progreso
octavio.ca@sfelipeprogreso.tecnm.mx, brenda.mg@sfelipeprogreso.tecnm.mx,

²Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Área Académica de Computación y Electrónica
manuel_ojeda@uaeh.edu.mx, virgilio@uaeh.edu.mx, afranco@uaeh.edu.mx, luishg@uaeh.edu.mx

³Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Escuela Superior Tepeji del Río, Ingeniería Industrial
hilario_martines@uaeh.edu.mx

RESUMEN.

En este trabajo se presenta una metodología para el problema de control de seguimiento de un péndulo simple con un control Proporcional Retardado (PR) con compensación no lineal que incluye el término de gravedad. La ventaja es evitar las mediciones de velocidad o su estimación, usado en la mayoría de los esquemas de control, como los controladores derivativos proporcionales y el control de par-torsión. El diseño del controlador se aborda mediante un análisis de σ -estabilidad y se valida su desempeño utilizando el modelo de un péndulo simple con un grado de libertad. El controlador propuesto es simulado para la regulación y el seguimiento de trayectoria. Los resultados se analizan desde una perspectiva de frecuencia y se mide el desempeño mediante el error cuadrático medio.

Palabras Clave: péndulo simple, retardo, seguimiento de trayectoria, no lineal, control.

ABSTRACT.

In this work a methodology is presented for the tracking control problem of a simple pendulum through Retarded Proportional controller with nonlinear compensation that includes the gravity term. The main advantage of the proposal is to avoid the need for speed measurements or its estimation, which is commonly used in most control schemes, such as proportional derivative controllers and torque control. The design of the controller is approached using a σ -stability analysis and its performance is tested using the model of a simple pendulum with one degree of freedom. The proposed controller is tested by regulation and trajectory tracking. The results are analyzed from a frequency perspective and are measured by the mean square error.

Keywords: simple pendulum, delay, trajectory tracking, non-linear, control.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de regulación y control de seguimiento para los robots manipuladores flexibles y rígidos han sido presentados en la literatura, donde la mayoría de esas propuestas utilizan como

controladores la retroalimentación basados en el controlador Proporcional Derivativo (PD) o el algoritmo de par calculado, considerando que la información de los estados está disponible, [1-9]. Un caso particular, es el péndulo simple que puede verse como un robot rígido de un grado de libertad donde se tienen términos no lineales, sin embargo, en la práctica pueden aplicarse métodos de linealización.

Por otro lado, se tienen detalles para implementar un controlador PD, principalmente porque la señal de velocidad puede no estar disponible para medición y por lo tanto debe determinarse mediante una diferenciación numérica de primer orden o algún otro enfoque. Debido al interés de evitar el uso de medidas de velocidad, se han desarrollado diferentes alternativas de controladores [10], [11] y [12] que, en general, siguen un procedimiento de diseño: en algunos casos se busca la construcción de un observador para la señal de velocidad empleando las entradas y salidas disponibles; por otro lado, se busca diseñar un controlador de retroalimentación de estado donde la velocidad se reemplaza por la reconstruida a partir del observador.

Los sistemas con retardo de tiempo pueden parecer inherentemente presente para una clase de sistema. Los efectos de los retardos temporales han sido un área activa de la investigación científica en una amplia gama de sistemas biológicos, ecológicos, de ingeniería, entre otros [14], [15], [16]. El análisis de esta clase de sistemas ha arrojado una importante cantidad de aportes teóricos en el área del análisis de estabilidad. En sistemas dinámicos controlados, pueden surgir retrasos debido a efectos de comunicación o fenómenos naturales [17], [18], cuyos efectos dinámicos no pueden despreciarse. Por un lado, la presencia de retrasos en el tiempo puede provocar un rendimiento deficiente o, en algunos casos, inestabilidad.

Por otro lado, la introducción de retardos de tiempo para las propuestas de control puede mejorar el rendimiento del sistema

o incluso estabilizarlo [18]. Este enfoque se ha utilizado con éxito para resolver el problema de estabilizar sistemas caóticos y oscilatorios de segundo orden [19]. El efecto estabilizador de los retrasos en la retroalimentación se ha estudiado en profundidad utilizando la estabilidad σ [20],[21], [22] para desigualdades de matrices lineales (LMI) [23]. Un controlador Proporcional Retardado (PR) con un enfoque introducido recientemente [20-23] con grandes alternativas a las leyes clásicas de control Proporcional Derivado. Este esquema evita el uso de observadores de estado o diferenciación numérica, lo que también mejora la respuesta del sistema frente a mediciones ruidosas. Sin embargo, tiene una desventaja, este esquema es el hecho de que implica un análisis de estabilidad para compensar la introducción del sistema en lazo cerrado.

Para lograr lo anterior, se ha estudiado detalladamente el análisis en el dominio de la frecuencia de la σ -estabilidad para sistemas lineales de segundo orden [22], [23]. Como principal resultado de este estudio, se desarrolló una estrategia de control PR resolviendo el problema de posición de seguimiento de trayectoria de un sistema lineal de segundo orden, el rendimiento del controlador PR ha mostrado ventajas con respecto al control Proporcional Derivado (PD).

Algunas aplicaciones del control PR tratan con sistemas lineales o aproximadamente linealizados que trabajan principalmente en una zona de equilibrio [24]. En otras aplicaciones, como el control de robots en tareas de seguimiento de trayectorias, las condiciones de operación exigen una zona de operación más grande de los controladores, y se ha demostrado que los controladores PR pueden estabilizar sistemas robóticos comparados con los PD [25]. En este caso, se está motivando el uso de controladores PR como una alternativa para el control de un péndulo simple compensando la gravedad con término no lineal.

El objetivo es presentar y diseñar un controlador que permita para resolver el problema de control de seguimiento de un péndulo simple mediante el uso de un controlador Proporcional Retardado con compensación no lineal que incluye el término de gravedad. La ventaja de la propuesta de solución es principal es la evasión de mediciones de velocidad o su estimación, la compensación de la gravedad y la simplificación del término no lineal.

El controlador es diseñado mediante el criterio de σ -estabilidad. El controlador propuesto se pone a prueba mediante la regulación y el seguimiento de trayectoria para un péndulo simple. En el apartado 2 se tiene el diseño del controlador proporciona retardado mediante una compensación no lineal y gravedad. En la sección 3 se presenta la simulación del controlador mediante la regulación y el seguimiento de trayectoria con los parámetros estimados de la sección II. Finalmente, se discuten los resultados y se presentan las conclusiones del trabajo obtenido.

2. DISEÑO DEL CONTROLADOR PR CON COMPENSACIÓN NO LINEAL

2.1. Estructura del controlador

El objetivo de control es implementar un controlador PR que permita compensar la no linealidad y la gravedad del modelo del comportamiento dinámico de un péndulo, determinando a partir de las ecuaciones físicas un modelo no lineal (ver Fig. 1).

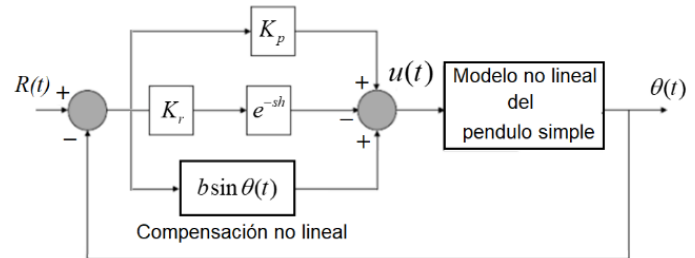


Fig. 1. Diagrama de control del PR con compensación no lineal.

El modelo del péndulo está compuesto por una bola de masa m situada en el extremo de una barra con masa despreciable de longitud l , el momento de inercia del péndulo respecto al punto de giro es J , el coeficiente de fricción es dado por B , la entrada de control es $u(t)$ y la variable de salida es el posición angular $\theta(t)$.

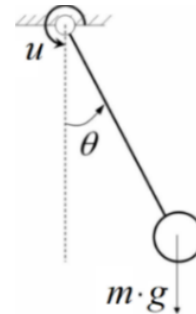


Fig. 2. Diagrama del péndulo simple

De la Fig. 2 se puede observar que el modelo del péndulo simple está en función del ángulo θ , determinado por la ecuación (1):

$$\ddot{\theta}(t) + a\dot{\theta}(t) + b \sin \theta(t) = u(t). \quad (1)$$

donde $a = B/J$ y $b = mgl/J$.

La estrategia de control $u(t)$ propuesta está basada en el controlador PR [21], [25] más una compensación que ayudará a minimizar el efecto de la gravedad y el término no lineal dado por la función $\sin \theta(t)$, dada como:

$$u(t) = -K_p \theta(t) + K_r \theta(t-h) + b \sin \theta(t) \quad (2)$$

donde K_p es la ganancia proporcional, K_r es la ganancia retardada y h es el retardo. La sintonización no es una tarea fácil considerando que tener al introducir un retardo de tiempo en el controlador causará un número infinito de polos en lazo cerrado.

Así, sustituyendo la ley de control de PR con compensación no lineal (2) en (1) se obtiene el siguiente cuasipolinomio característico en lazo cerrado:

$$p(s) = s^2 + as + K_p + K_r e^{-sh} = 0 \quad (3)$$

Es decir, el sistema (1) y (2) es exponencialmente estable si todas las raíces de (3) están ubicados en la región izquierda del plano complejo.

Definición 1 [26]. Se supone que existe $\sigma^* = \max[\lambda : p(\lambda) = 0]$ y $y(t, \varphi)$ es la solución del sistema (1) y (2) para la condición inicial $\varphi(\theta)$. Así entonces, para cualquier $\sigma > \sigma^*$, existe una constante $\gamma = \gamma(\sigma)$ tal que:

$$\|y(t, \varphi)\| \leq \gamma e^{\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

En particular, si $\sigma^* < 0$ entonces se selecciona $\sigma^* < \sigma < 0$ tal que brinde una solución exponencialmente estable. Ahora, el problema a considerar es determinar el máximo valor que σ puede tomar; corresponde al máximo alcanzable tasa de decadencia exponencial para el sistema en lazo cerrado.

2.2. Regiones de σ – estabilidad

El espacio de parámetros es determinado mediante el cuasipolinomio característico (3) usando las hipersuperficies dadas cuando $s = 0$ y $s = i\omega$, que determinan las regiones estables. Un método empleado para resolver este problema es mediante el criterio de σ – estabilidad de $p(s)$, es decir, es necesario realizar el cambio de variable $s \rightarrow s - \sigma$ y analizar la estabilidad del cuasipolinomio.

$$p(s - \sigma) = (s - \sigma)^2 + a(s - \sigma) + K_p + K_r e^{-(s - \sigma)h} \quad (5)$$

Por lo que, como paso preliminar para la caracterización de la cota de decaimiento máximo alcanzable para el sistema en lazo cerrado. Usando el método de D-particiones [27] es posible dividir el espacio de parámetros en dos regiones disjuntas separadas por límites de cruce de estabilidad. Estos límites permiten ver si una raíz de $p(s - \sigma)$ tocan el eje imaginario del plano complejo [28]. Por lo tanto, se buscan los puntos de cruce para (h, K_r) de manera que la ecuación (5) se iguala a cero.

$$p(s - \sigma) = 0. \quad (6)$$

Los límites de cruce de estabilidad generados cuando una raíz de $p(s - \sigma)$ está en el origen del plano complejo se obtienen estableciendo $s = 0$ en (5), por lo tanto

$$p(0) = \sigma^2 - a\sigma + K_p + K_r e^{h\sigma} = 0 \quad (7)$$

El dominio de estabilidad exacto del sistema en lazo cerrado está limitado por la hipersuperficie, así resolviendo para $K_r(h)$ se obtiene la ecuación (8).

$$K_r(h) = \frac{\sigma^2 - a\sigma + K_p}{e^{h\sigma}} \quad (8)$$

Por otro lado, la estabilidad cruzando los límites generados cuando una raíz de $p(s - \sigma)$ está ubicada en el eje imaginario y se obtienen estableciendo $s = i\omega$ en (5), por lo tanto

$$p(i\omega) = -\omega^2 - 2\sigma\omega i + \sigma^2 + a\omega i - a\sigma + K_p \quad (9)$$

$$-K_r e^{h\sigma} \cos(h\omega) + K_r e^{h\sigma} i \sin(h\omega) = 0$$

Lo anterior es cierto cuando las partes real e imaginaria de $p(s - \sigma) = p(i\omega - \sigma)$ son simultáneamente cero, es decir

$$\text{Re}(p) = -\omega^2 + \sigma^2 - a\sigma + K_p - K_r e^{h\sigma} \cos(h\omega) = 0 \quad (10)$$

$$\text{Im}(p) = -2\sigma\omega + a\omega + K_r e^{h\sigma} \sin(h\omega) = 0 \quad (11)$$

Así, dividiendo la ecuación (10) entre la ecuación (11) se tiene:

$$\cot(h\omega \pm n\pi) = \frac{\sigma^2 + K_p - a\sigma - \omega^2}{2\sigma\omega - a\omega} \quad (12)$$

Despejando de la ecuación (12) a $h(\omega)$:

$$h(\omega) = \frac{1}{\omega} \arccot \left(\frac{\sigma^2 - a\sigma + K_p - \omega^2}{2\omega(\sigma - a/2)} \right) + \frac{n\pi}{\omega} \quad (13)$$

$$K_r(\omega) = \frac{2\sigma\omega - a\omega}{e^{h(\omega)\sigma} (\sin(h(\omega)\omega))} \quad (14)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^+$ y $n = 1, 2, 3, \dots$. Así las ecuaciones (13) y (14) son definidas como las ecuaciones paramétricas.

La Fig. 3 muestra el espacio de parámetros mediante las hipersuperficies encontradas con las ecuaciones paramétricas. Los límites son obtenidos mediante realizando una iteración de h en (13), ω en (14) y (5) usando $a = 1$, $K_p = 10$ and $\sigma \in [0, 4.2787]$. La Fig. 3 muestra dos zonas que pueden ser distinguidas. La primera zona corresponder a valores con retardos bajos, que corresponden a los cruces de frontera para $s = 0$ y $s = i\omega$ interceptados cada uno con una región cerrada llamada región principal de estabilidad. La segunda zona está formada por los límites de cruce obtenidas de las ecuaciones paramétricas para $s = i\omega$, esta zona está compuesta por regiones cerradas llamadas regiones de estabilidad periódica.

Ambas regiones colapsan en diferentes puntos dentro del espacio de parámetros para diferentes valores del par (h, K_r) . Cada punto de colapso ocurre para un σ específico. Además, a medida que h aumenta, se necesita un valor menor de σ para inducir el colapso de una región.

Por el contrario, si σ aumenta, entonces se necesita un valor bajo de h para inducir un colapso. Al inspeccionar ambas regiones, se encuentra que el colapso de la región de estabilidad principal se caracteriza por una raíz dominante real triple en $-\sigma$ en el plano complejo cuando $\sigma = 4.2787$ y se tiene un retardo $h = 0.3199$ y una ganancia retardada $K_r = 6.0117$.

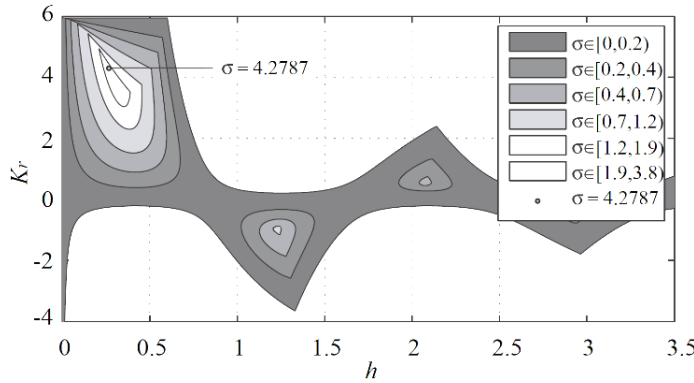


Fig. 3. D-particiones para el cuasipolinomio del sistema en lazo cerrado con regiones σ estables.

Por otro lado, los colapsos de la región de estabilidad periódica se caracterizan por una doble raíz dominante imaginaria con parte real igual a $-\sigma$. De la Definición 1 se deduce que cada punto de colapso corresponde a una tasa de decaimiento exponencial máxima local lograda en cada región. Como se demuestra en la siguiente sección, un valor bajo de h requiere un valor mayor de σ para que una región colapse, lo que implica que la tasa de caída exponencial máxima global ocurre cuando el retraso es pequeño, es decir, dentro de la región principal de estabilidad.

2.3. Estimación de ganancias del controlador PR

Para determinar las ganancias (h, K_r) del controlador PR de forma analítica y mediante el máximo decaimiento exponencial, se recurre a estimarlos mediante $p(s-\sigma)|_{s=0} = 0$, $\frac{\partial p(s-\sigma)}{\partial s}|_{s=0} = 0$ y $\frac{\partial^2 p(s-\sigma)}{\partial s^2}|_{s=0} = 0$. Es decir, con la ecuación (5), su primera y segunda derivada con respecto a la variable compleja s evaluadas en cero:

$$p(s-\sigma)|_{s=0} = \sigma^2 - a\sigma + K_p - K_r e^{h\sigma} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial p(s-\sigma)}{\partial s}|_{s=0} = -2\sigma + a + hK_r e^{h\sigma} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 p(s-\sigma)}{\partial s^2}|_{s=0} = 2 - h^2 K_r e^{h\sigma} = 0 \quad (17)$$

Primero se fija la ganancia proporcional $K_p > \frac{-3}{4}a^2$. De las ecuaciones (15) y (16) se tiene:

$$h = \frac{2\sigma - a}{\sigma^2 - a\sigma + K_p} \quad (18)$$

Las ecuaciones (16) y (17) implican

$$h^2 = \frac{2}{\sigma^2 - a\sigma + K_p} \quad (19)$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación (18) en (19) se tiene:

$$(2\sigma - a)^2 = 2(\sigma^2 - a\sigma + K_p) \quad (20)$$

Realizando operaciones algebraicas la ecuación (20) es obtenida la ecuación (21). Ahora, para obtener la ecuación (22) se sustituye la ecuación (21) en la ecuación (18), finalmente, para obtener la ecuación (23) se obtiene de la ecuación 16. Entonces, entonces una triple raíz dominante para el sistema en lazo cerrado (1) y (2) en $-\sigma^*$ se logra con las ganancias estimadas:

$$\sigma^* = \frac{a + \sqrt{3a^2 + 4K_p}}{2} \quad (21)$$

En suma, la ganancia K_r y el retardo h que σ -estabilizan al sistema (1) y (2) con decaimiento exponencial σ^* :

$$h^* = \frac{\sqrt{3a^2 + 4K_p}}{\frac{a^2}{2} + 2K_p} \quad (22)$$

$$K_r^* = \frac{2\sigma a}{h^* e^{h^* \sigma^*}} \quad (23)$$

Así, la estrategia de control presentada asegura una sólida estabilidad del sistema en lazo cerrado. En vista de la continuidad de la ubicación de las raíces con respecto a los parámetros [23], el margen de estabilidad obtenido σ^* permite variaciones de los parámetros, incluidas las perturbaciones externas y las incertidumbres debido a los retardos en el sistema debido al muestreo.

3. RESULTADOS Y SIMULACIONES

En esta sección se presentan los resultados experimentales para el control PR con compensación no lineal para el péndulo simple mediante la regulación y el seguimiento de trayectorias con parámetros $a=1, b=0.5, K_p=10, h=0.3199$ y $K_r=6.0117$.

La simulación numérica es llevada a cabo usando el método de integración de Runge Kutta con un periodo de integración de 0.01 segundos. La señal de referencia para regulación que conmuta entre 0 y π radianes, $R(t)=[0, \pi]$ rad y la señal de referencia para seguimiento de trayectorias es dada mediante una suma de senoidales

$$R(t) = 2.5\sin(0.1t) + 20\sin(0.1t) + 20\sin(0.01t) \text{ rad.} \quad (24)$$

Por otro lado, es estimado el error cuadrático medio (ECM) que permite medir el promedio de los errores al cuadrado, es decir, la diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida del sistema. En la Fig. 4 se muestra la respuesta del péndulo para el problema de regulación. En este caso, se emplea una señal pulso con una frecuencia de 50 segundos, la cual lleva a cabo la regulación del péndulo de la posición inicial de 0 a π , o 180° grados.

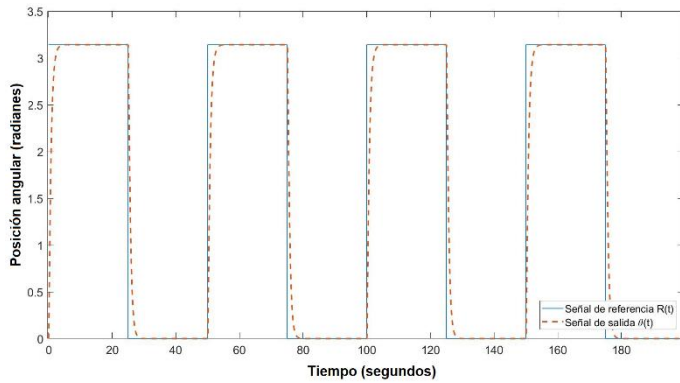


Fig. 4. Señal de respuesta del péndulo para el problema de regulación.

Por otro lado, en la Fig. 5 se presenta la señal de error para el problema de regulación de posición del péndulo, dicha señal es medida o presentada en radianes.

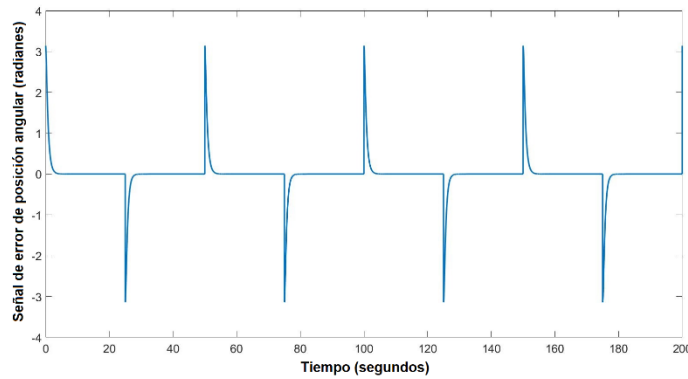


Fig. 5. Señal de error para el problema de regulación con el péndulo.

Por su parte la Fig. 6 presenta la respuesta del péndulo simple con la estrategia de control PR diseñada, en este caso son presentadas la señal de la trayectoria de referencia y la señal de la trayectoria de salida. Donde puede observarse que el controlador propuesto es capaz de llevar a cabo el seguimiento de trayectoria para el péndulo presentado.

Por otro lado, es presentada la señal del error cuadrático medio (ECM) que permite evaluar la precisión y el rendimiento del sistema en lazo cerrado en relación con los resultados obtenidos. Específicamente, el ECM mide la media de los cuadrados de los errores, donde cada error es la diferencia entre el valor predicho o estimado y el valor real o observado. El ECM es estimado con base en:

$$ECM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \theta_i)^2 \quad (25)$$

donde n es el número de muestras, R_i es el valor de la referencia y θ_i es el valor de la salida para cada muestra, respectivamente.

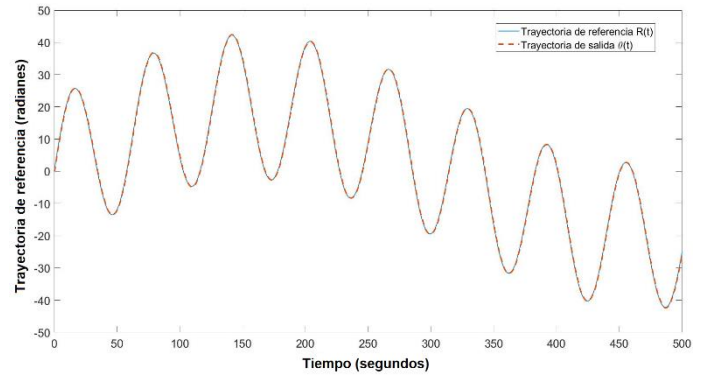


Fig. 6. Señal de respuesta del péndulo para el problema de seguimiento de trayectoria.

El ECM permite cuantificar el rendimiento de un controlador al minimizar las desviaciones de la salida del sistema respecto a una referencia deseada. En este caso, el valor de ECM es bajo y tiende a cero (ver Fig. 7), por lo que, indica un buen desempeño en el seguimiento de trayectoria del péndulo con base en las simulaciones presentadas.

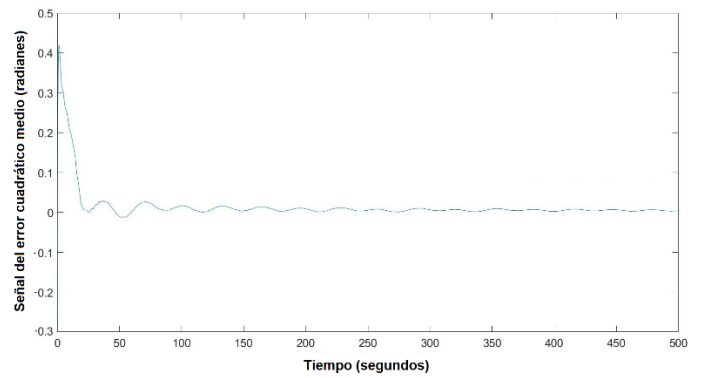


Fig. 7. Señal del error cuadrático medio para el problema de seguimiento de trayectoria con el péndulo.

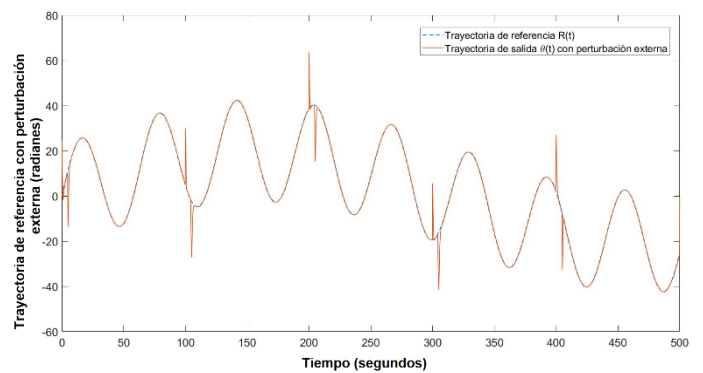


Fig. 8. Señal de respuesta del péndulo para el problema de seguimiento de trayectoria con perturbaciones.

Como prueba final, el seguimiento de trayectorias para el péndulo simple usando la técnica de control PR propuesta es puesta a prueba ante perturbaciones mediante una señal pulso con magnitud de 50 y una periodo de tiempo de 100 segundos.

Ante esto, es obtenida la salida del sistema en lazo cerrado, donde puede observarse que la propuesta presentada es robusta ante perturbaciones [29], donde a pesar de ellas, el seguimiento de trayectoria es llevado a cabo sin ningún contratiempo, tal como se muestra en la Fig. 8.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el uso de un controlador Proporcional Retardado más compensación no lineal con gravedad para evitar las desventajas que presenta la estimación de velocidad, como en el control Proporcional Derivado. De hecho, a pesar de su estructura básica, se ha demostrado (mediante resultados numéricos) que el controlador PR es capaz de controlar la dinámica del péndulo simple y compensar las posibles incertidumbres inherentes.

Los resultados numéricos muestran que el controlador PR tiene un buen desempeño para las tareas de trayectoria y regulación (en el sentido de la magnitud del error de seguimiento, y validado mediante una comparación del análisis del error cuadrático medio). Por lo que, el controlador PR brinda una alternativa para el control de sistemas no lineales, además de una fácil implementación (validada mediante un análisis del espectro de frecuencias) y su adecuado desempeño en tareas de seguimiento de trayectorias sin el uso de etapas de filtrado de señales. Cabe mencionarse que los resultados obtenidos buscan una alternativa en la propuesta de controladores PD, además, permiten demostrar la robustez con base en su respuesta, lo cual abre la puerta al diseño de otros controladores y a la búsqueda de mejores alternativas de control mediante métodos basados en el lugar de las raíces, así como técnicas de control basadas en robustez, optimización, entre otros.

5. REFERENCIAS

- [1] B. Paden and R. Panja, "Globally asymptotically stable 'PD+' controller for robot manipulators," *Int. J. Control*, vol. 47, no. 6, 1988.
- [2] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, vol. 3. New York, NY, USA: Wiley, 2006.
- [3] A. Zavala-Río, E. Aguiñaga-Ruiz, and V. Santibáñez, "Global trajectory tracking through output feedback for robot manipulators with bounded inputs," *Asian J. Control*, vol. 13, no. 3, pp. 430–438, 2011.
- [4] J. Bowkett and R. Mukherjee, "Comparison of control methods for twolink planar flexible manipulator," in *Proc. Int. Des. Eng. Tech. Conf. Comput. Inf. Eng. Conf.* New York, NY, USA: ASME, 2017, pp. 1–10.
- [5] Y. Si, J. Pu, and L. Sun, "A fast terminal sliding mode control of twolink flexible manipulators for trajectory tracking," in *Proc. Chin. Automat. Congr. (CAC)*, 2017, pp. 6387–6391.
- [6] J. Z. Sasiadek, S. Ulrich, and A. Krzyżak, "Trajectory tracking and nonparametric identification of flexible space robot manipulators," in *Proc. 23rd Int. Conf. Methods Models Automat. Robot. (MMAR)*, Aug. 2018, pp. 83–88.
- [7] Z.-C. Qiu, C. Li, and X.-M. Zhang, "Experimental study on active vibration control for a kind of two-link flexible manipulator," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 118, pp. 623–644, Mar. 2019.
- [8] K. Lochan, J. P. Singh, B. K. Roy, and B. Subudhi, "Hidden chaotic path planning and control of a two-link flexible robot manipulator," in *Nonlinear Dynamical Systems with Self-Excited and Hidden Attractors*. Cham, Switzerland: Springer, 2018, pp. 433–463.
- [9] S. T. Wu, S.-Q. Tang, and K.-P. Huang, "Vibration attenuation of a twolink flexible arm carried by a translational stage," *J. Vib. Control*, vol. 24, no. 23, pp. 1–15, 2018.
- [10] H. Berghuis and H. Nijmeijer, "Robust control of robots using only position measurements," *IFAC Proc.*, vol. 26, no. 2, pp. 329–334, 1993.
- [11] C. C. De Wit and N. Fixot, "Robot control via robust estimated state feedback," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 36, no. 12, pp. 1497–1501.
- [12] R. Kelly, "A simple set-point robot controller by using only position measurements," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 26, no. 2, pp. 527–530, 1993.
- [13] R. M. May, "Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels," *Ecology*, vol. 54, no. 2, pp. 315–325, 1973.
- [14] V. L. Kharitonov and A. P. Zhabko, "Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems," *Automatica*, vol. 39, no. 1, pp. 15–20, 2003.
- [15] K. Gu, K. L. Vladimir, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*. Berlin, Germany: Springer, 2003.
- [16] E. Fridman, *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Basel, Germany: Birkhäuser, 2014.
- [17] S. I. Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*, vol. 269. New York, NY, USA: Springer, 2001.
- [18] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benites-Read, and R. Byrne, "Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems," in *Proc. Amer. Control Conf.*, Jun. 1993, pp. 3106–3107.
- [19] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benites-Read, and R. Byrne, "Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems," in *Proc. Amer. Control Conf.*, Jun. 1993, pp. 3106–3107.
- [20] R. Villafuerte and S. Mondié, "Tuning the leading roots of a second order DC servomotor with proportional retarded control," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 43, no. 2, pp. 337–342, 2010.
- [21] S. Mondie, R. Villafuerte, and R. Garrido, "Tuning and noise attenuation of a second order system using proportional retarded control," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 44, no. 1, pp. 10337–10342, 2011.
- [22] R. Villafuerte, S. Mondié, and R. Garrido, "Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 21, no. 3, pp. 983–990, May 2013.
- [23] T. Ortega-Montiel, R. Villafuerte-Segura, C. Vázquez-Aguilera, and L. Freidovich, "Proportional retarded controller to stabilize underactuated systems with measurement delays: Furuta pendulum case study," *Math. Problems Eng.*, vol. 2017, Dec. 2017, Art. no. 2505086.
- [24] T. Ortega-Montiel, R. Villafuerte-Segura, C. Vázquez-Aguilera, and L. Freidovich, "Proportional retarded controller to stabilize underactuated systems with measurement delays: Furuta pendulum case study," *Math. Problems Eng.*, vol. 2017, Dec. 2017, Art. no. 2505086.
- [25] M. Ramírez-Neria, G. Ochoa-Ortega, A. Luviano-Juárez, N. Lozada-Castillo, M. A. Trujano-Cabrera and J. P. Campos-López, "Proportional Retarded Control of Robot Manipulators," in *IEEE Access*, vol. 7, pp. 13989–13998, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2892414.
- [26] Hale, J. K., Sjoerd M., Verduyn, L. *Introduction to functional differential equations*, 1st ed. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [27] Neimark, J. D- subdivisions and spaces of quasipolynomials. *Prikl. Mat. Mekh.* 1949, 13(5):349–80.
- [28] Michiels W, Niculescu S. I. *Stability and stabilization of time-delay systems: an eigenvalue-based approach*. 1sted. Philadelphia: SIAM, 2007.
- [29] R. A. Zaldivar-López, M Ojeda-Misses, "Controlador Proporcional Integral Posicast Robusto para una clase de sistema lineal invariante en el tiempo de segundo orden", *Ingeniería Investigación y Tecnología (México)*, 04, 1-10, 010,2023. <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2023.24.4.027>