

COMPARACIÓN ENTRE LA SOLUCIÓN DE BLASIUS Y LA SOLUCIÓN DE POISEUILLE PARA FLUJO ENTRE PLACAS PARALELAS

Muro Teruel Luis Enrique, Chávez López Óscar Arturo, Rosas Yescas Israel

Tecnológico Nacional de México Campus Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Av. Tecnológico #2909
Tel. 614-201-2000 ext. 2112

lmuro0436@gmail.com, oscar.cl@chihuahua.tecnm.mx, israel.ry@chihuahua.tecnm.mx

RESUMEN.

El presente trabajo se realiza un análisis de similitud entre la solución de Blasius para flujo sobre una placa plana, y la solución de Poiseuille para flujo entre dos placas planas paralelas. Se emplearon métodos computacionales para resolver las ecuaciones de gobierno del flujo de Poiseuille, variando la separación entre las placas de 1 a 1000 metros; para cada simulación realizada, se evaluó el cociente entre la capa límite hidrodinámica y térmica, variando el número de Prandtl de 10 a 400. El análisis de similitud se realiza de dos formas: por un lado, se ajustan los datos numéricos a una curva para evaluar la tendencia de éstos, y segundo, se evalúa la distancia euclidiana entre la solución numérica de Poiseuille y la solución de Blasius. Se concluye que la solución de Poiseuille se acerca a la solución de Blasius cuando la separación entre las placas tiende a infinito.

Palabras clave: Solución de Blasius, solución de Poiseuille, capa límite, dinámica de fluidos computacional.

ABSTRACT.

This work shows a similarity study between Blasius solution for flow over a flat plate, and Poiseuille solution for flow between parallel plates. Computational techniques were employed to solve govern equations for Poiseuille flow, changing the separation between plates from 1 to 1500 meters. For each simulation, the quotient between thermal and hydrodynamic boundary layer was evaluated, varying Prandtl numbers from 10 to 400. The similarity analysis was made in two ways: first, numerical results were adjusted to a curve to evaluate their tendency, and second, the Euclidean distance between Poiseuille and Blasius solution was evaluated.

Keywords: Blasius solution, Poiseuille solution, boundary layer, computational fluid dynamics.

1. INTRODUCCIÓN

En sus inicios, la dinámica de fluidos era estudiada bajo la noción de “fluido ideal”, es decir, se consideraba a los fluidos como medios no viscosos [1]. Si bien esta suposición permite estudiar una cantidad diversa de situaciones que involucran fluidos en movimiento, se vuelve insuficiente cuando lo que se busca es una descripción más fidedigna del comportamiento de un flujo; particularmente, los problemas surgen cuando se desea modelar el efecto de no deslizamiento en las interfaces fluido-sólido, las cuales dan lugar a gradientes de velocidad [2].

Fue hasta el año 1904 que el físico alemán Ludwig Prandtl sugirió que, para números de Reynolds suficientemente altos, pueden delimitarse la totalidad de los efectos viscosos a una región pequeña próxima a la interfaz fluido-sólido, y fuera de la cual el flujo puede considerarse como no viscoso [3]. A la frontera entre ambas regiones del flujo se le denomina “capa límite”, y a la región delimitada por ella se le llama “región de capa límite”. Este enfoque probó ser de utilidad para modelar matemáticamente el flujo cercano a las interfaces fluido sólido, pues dada la similitud entre las ecuaciones de transporte de momento y energía, es posible extender el análisis propuesto por Prandtl para así definir conceptos tales como la “capa límite térmico”, es decir, una región cercana a la interfaz fluido-sólido donde los gradientes de temperatura son significativos [3]. La definición formal de capa límite, es la de aquella colección de puntos en los cuales la velocidad (o temperatura si hablamos de la capa límite térmica) es el 99% de la velocidad (o temperatura) de la corriente libre [4].

El comportamiento de capa límite de un determinado flujo está definido por diversos factores, tales como la geometría de la interfaz y las características propias del flujo en la región no viscosa; generalmente, no es posible determinar de forma analítica los parámetros que describen esta región, y en dichos casos se requiere recurrir a la experimentación o a las técnicas computacionales. Uno de los limitados casos en los cuales es posible la obtención de una solución analítica a las ecuaciones de capa límite, es para un flujo unidireccional sobre una placa plana; a la solución de este caso se le denomina “solución de Blasius”, en honor al matemático Heinrich Blasius [5].

Si al caso anterior se le agrega una placa adicional, paralela y a una determinada distancia de la primera, entonces éste se transforma en el problema de Poiseuille [6]; a diferencia del flujo sobre una sola placa plana, el problema de Poiseuille no tiene solución analítica para los parámetros que describen el comportamiento de la capa límite, por lo que, a pesar de que ser problemas que simple vista comparten una geometría similar, poseen soluciones muy distintas. Sin embargo, la intuición invita a pensar que, entre mayor sea la separación entre las placas para el flujo de Poiseuille, más similar será la solución de Poiseuille a la de Blasius.

Este trabajo se centra en mostrar la validez de esta hipótesis, para lo cual se emplean técnicas numéricas para estimar los espesores de ambas capas límite para flujo de Poiseuille; se comparan estos resultados con los arrojados por la solución de Blasius.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Solución de Blasius para flujo unidireccional sobre una placa plana

Se toman en cuenta las siguientes suposiciones:

- El flujo es laminar, incompresible y estacionario.
- El flujo incide sobre la placa con un ángulo de cero grados.
- El flujo ocurre únicamente en dirección paralela a la placa.
- El perfil de velocidad por fuera de la capa límite es una constante U_∞ .
- No hay caídas de presión en dirección perpendicular a la placa.
- Se cumple la condición de no deslizamiento en la interfaz entre el fluido y la placa.
- Los efectos viscosos en dirección paralela a la placa son despreciables.
- La placa se mantiene a una temperatura constante T_p , mientras que el fluido mantiene una temperatura T_∞ .
- Los efectos de la conducción en dirección paralela a la placa son despreciables.

El problema se ilustra mediante el esquema mostrado en la Figura 1, donde la línea rosa representa la capa límite. Las variables δ y δ_T , representan los espesores de las capas límite hidrodinámica y térmica, respectivamente.

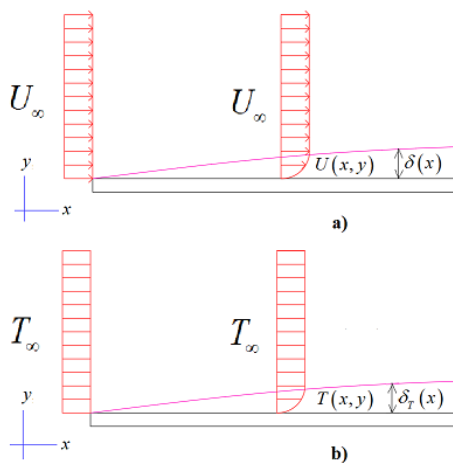


Figura 1 Flujo unidireccional sobre una placa plana. a) Capa límite hidrodinámica. b) Capa límite térmica.

Realizando un análisis integral, tanto para el transporte de momento, como para el transporte de energía, es posible obtener la siguiente relación entre los espesores de ambas capas límite:

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \text{Pr}^{-1/3}, \quad (1)$$

donde Pr es el número de Prandtl del fluido, definido como:

$$\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{k}, \quad (2)$$

donde μ es la viscosidad, C_p es el calor específico a presión constante, y k es la conductividad térmica [7].

2.2. Problema de Poiseuille

Se le denomina “flujo de Poiseuille”, a una clase particular de flujo, el cual es inducido por presión (a diferencia del flujo de Couette, que es inducido por arrastre), lo cual significa que el movimiento del fluido se origina por la existencia de un gradiente de presión [8].

Generalmente, el flujo de Poiseuille se encuentra confinado en una tubería o un canal; para este caso en particular suponga dos placas planas paralelas a una temperatura constante T_p , y entre ellas, un fluido entra con un perfil de velocidad constante U_0 a una temperatura uniforme T_0 , tal y como se aprecia en la Figura 2.

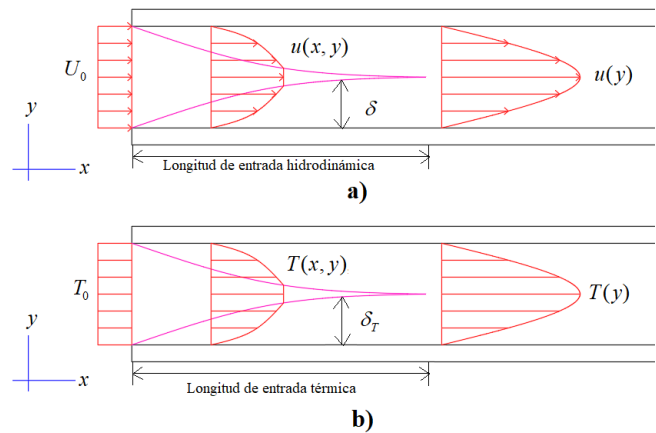


Figura 2 Flujo entre dos placas paralelas. a) Perfil hidrodinámico. b) Perfil térmico.

Para fines prácticos, se supondrá que el flujo es laminar, incompresible y estacionario. Debido a la condición de no deslizamiento, la velocidad de las capas de fluido adyacentes a las placas es nula; al mismo tiempo, las capas de fluido tienden a frenarse entre sí, debido a los esfuerzos viscosos. Este efecto, junto con el principio de conservación de masa, dan lugar a un gradiente de velocidad a lo largo de la distancia que separa a las placas. Algo similar ocurre con la temperatura del fluido, donde debido a la diferencia respecto temperatura de las placas, ocurre una transferencia de calor que da lugar a gradientes de

temperatura a lo largo de la separación entre las placas. En ambos casos, se tiene un comportamiento de capa límite, la cual divide el flujo en dos regiones: una donde los gradientes (ya sean de velocidad o de temperatura) son significativos, y otra donde éstos son despreciables.

Ambas capas límite incrementan su grosor a medida que el fluido avanza desde la entrada. Recorrida cierta distancia, la capa límite hidrodinámica cubrirá todo el dominio de flujo, y a dicha distancia se le llama “longitud de entrada hidrodinámica” [9]; se dice entonces que el flujo está hidrodinámicamente desarrollado, lo que se refleja en que el perfil de velocidad adquiere un comportamiento parabólico que permanece invariable en el eje longitudinal (tal como lo refleja la Figura 2). De forma análoga, la distancia para la cual la capa límite térmica cubre la totalidad del dominio de flujo, se le denomina “longitud de entrada térmica” [9]; una vez el fluido han recorrido esta longitud, se dice que el flujo está térmicamente desarrollado, con lo cual, el perfil de temperatura adquiere también un comportamiento parabólico que es invariable a lo largo del eje longitudinal (ver Figura 2).

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de un flujo de Poiseuille con las características descritas con anterioridad, son las siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5)$$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (6)$$

donde u y v son las componentes horizontal y vertical de la velocidad (respectivamente), P es la presión, T es la temperatura, y ρ es la densidad. A día de hoy, no se conoce una solución analítica para las ecuaciones (3) a (6) en la longitud de entrada (que es la de interés en este trabajo), por lo que se debe recurrir a métodos numéricos para obtener una solución.

3. DESARROLLO PRÁCTICO

3.1. Modelo matemático

Dado que la finalidad es comprobar si la solución de Poiseuille se acerca a la solución de Blasius conforme incrementa la separación entre las placas, se resuelve mediante métodos numéricos el problema de Poiseuille para distintos valores de esta distancia. Las ecuaciones (3-6) modelan el flujo de Poiseuille para cada uno de los casos; sin embargo, a fin de facilitar el control de los distintos parámetros de la simulación, así como también la interpretación de resultados, se opta por resolver dicho sistema en su forma adimensional:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (7)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (8)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (9)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right), \quad (10)$$

donde los asteriscos indican que una variable es adimensional, y Re es el número de Reynolds, definido matemáticamente como:

$$\text{Re} = \frac{\rho L_C V_C}{\mu}, \quad (11)$$

donde L_C y V_C son una longitud y una velocidad características del sistema, respectivamente. Se elige como longitud característica a la separación entre las placas, y como velocidad característica a la velocidad de entrada.

Para este trabajo se resuelven las ecuaciones (7-9) para valores de 1, 10, 100 y 1000 metros de separación entre las placas. Para cada valor de esta distancia, se resuelve la ecuación (10) para números de Prandtl que van de 10 a 400.

3.2. Geometría, malla y condiciones de frontera

Las ecuaciones (7-10) se resuelven sobre un dominio rectangular de largo L y alto H , como se muestra en la Figura 3. Esta geometría se discretiza con una malla estructurada compuesta de elementos cuadrados.

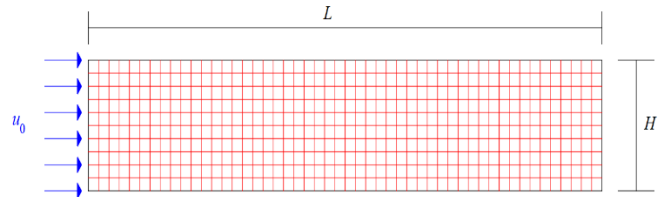


Figura 3 Dominio computacional con malla.

Las dos fronteras de largo L representan las interfaces del fluido con las placas paralelas; para la velocidad, se aplica la condición de no deslizamiento en estas interfaces (es decir, se considera nula la velocidad en dichas fronteras), para la temperatura, se considera que ambas fronteras se mantienen a una temperatura constante T_p , y para la presión, se realiza una interpolación de primer orden tomando en cuenta los valores de la presión en los dos nodos más próximos a esta frontera en dirección perpendicular.

Las dos fronteras de longitud H representan la entrada y descarga de fluido, respectivamente. En la entrada de fluido, se

definen perfiles de velocidad y temperatura constantes, definidos con los valores U_0 y T_0 , en tanto que para la presión, se realiza una interpolación de primer orden similar a la empleada en las interfaces fluido-sólido. Finalmente, para la descarga de fluido, se asume que el flujo se desarrolla tanto hidrodinámica como térmicamente, por lo que los gradientes de velocidad y temperatura en esta frontera son nulos; por su parte, se define un valor de cero para la presión en esta frontera.

3.3. Método de solución y otros parámetros

Las ecuaciones (7-10) se discretizan usando el método de volúmenes finitos, para transformar el sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraicas; para los términos de convección, se emplea adicionalmente una interpolación corriente arriba de primer orden. Una vez discretizadas las ecuaciones (7-9), estas se resuelven usando el algoritmo SIMPLE, con coeficientes de relajación de 0.5 para las ecuaciones de momento, y de 0.0001 para la ecuación de presión. Obtenida la solución de las formas discretas de las ecuaciones (7-9) se resuelve la forma discreta de la ecuación (10) con el método de Jacobi, empleando un coeficiente de relajación de 0.1.

3.4. Estimación de los espesores de capa límite

El espesor de la capa límite hidrodinámica evaluando el valor de la velocidad a lo largo de distintas ubicaciones de la placa inferior, y buscando la altura a la cual la velocidad es igual o mayor al 99% de la velocidad en la altura media entre las placas. Un criterio similar se emplea para estimar el espesor de la capa límite térmica, sólo que se evalúan los valores de la temperatura en lugar de los de velocidad. La razón $\frac{\delta_T}{\delta}$ se calcula en el primer nodo más próximo a la entrada de fluido, para distintos números de Prandtl.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La Figura 4 muestra una gráfica que compara el comportamiento del cociente $\frac{\delta_T}{\delta}$ respecto al número de Prandtl, para cada una de las distintas separaciones de placa. Dichas gráficas son comparadas con el valor del cociente $\frac{\delta_T}{\delta}$ indicado por la ecuación (1).

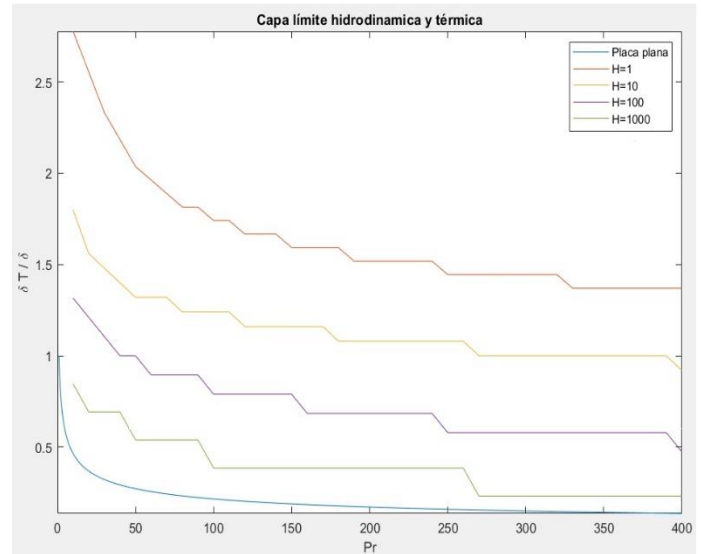


Figura 4 Comparación de las soluciones de Poiseuille y de Blasius para distintas separaciones de placa.

Cualitativamente, se observa que, entre mayor es la separación entre ambas placas, el cociente $\frac{\delta_T}{\delta}$ para la solución de Poiseuille tienden a acercarse a la gráfica definida por la ecuación (1). La evaluación de la similitud entre ambas soluciones se lleva a cabo de acuerdo con dos criterios: uno de forma (se evalúa qué tan bien se ajustan los datos numéricos de la solución de Poiseuille a una curva con la forma de la ecuación (1)), y uno de distancia numérica (se evalúa qué tanto difieren numéricamente la solución numérica del problema de Poiseuille y la solución de Blasius).

Para analizar la similitud de forma, se emplea un ajuste por mínimos cuadrados de los datos numéricos de la solución de Poiseuille. Se define la función Q_A como curva base para llevar a cabo el ajuste:

$$Q_A(\text{Pr}) = A \text{Pr}^{-\frac{1}{3}} + B, \quad (12)$$

donde A es el parámetro a determinar. Para medir la calidad del ajuste se emplea el coeficiente de determinación R^2 , definido de la siguiente forma:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - Q_A(\text{Pr}_i))^2}{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}, \quad (13)$$

donde Q_i representa cada uno de los valores numéricos obtenidos previamente para el cociente δ_T/δ , $Q_A(\text{Pr}_i)$ representa el mismo cociente, pero dado por la ecuación (12), \bar{Q} es el promedio de todos los datos numéricos, y n es el número total de datos numéricos. R^2 puede tomar valores entre 0 y 1, siendo muy cercano a 1 cuando el ajuste es de calidad, y cercano a cero cuando ocurre lo contrario.

La Tabla 1 muestra los parámetros A y R^2 para cada una de las separaciones entre placas.

Tabla 1 Parámetros del ajuste por mínimos cuadrados para cada separación entre placas.

Separación entre placas (m)	A	B	R^2
1	4.7627	0.7241	0.9816
10	2.6257	0.6078	0.9919
100	2.6430	0.1610	0.9604
1000	1.9537	-0.0370	0.9877

Dado que los valores de A y B se acercan a 1 y a 0 entre más se separan las placas, se puede inducir que para distancias más grandes, las ecuaciones (12) y (1) son muy similares. Además, observando que los valores de R^2 son en todos los casos cercanos a la unidad, se deduce que ciertamente los datos numéricos para la solución de Poiseuille se ajustan bastante bien a una curva de exponente fraccionario y negativo, con lo cual su tendencia si sigue la forma de la ecuación (1).

Para evaluar la diferencia numérica entre ambas soluciones, se emplea el parámetro L^2 , conocido también como distancia euclidiana. Dicho parámetro se define en un espacio bidimensional de la siguiente manera:

$$L^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (p_i - q_i)^2}, \quad (14)$$

donde, p_i y q_i representan las coordenadas de dos puntos $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$. En este caso, se evalúa únicamente la diferencia entre el cociente δ_T/δ dado por la ecuación (1), y el valor del cociente determinado por los resultados numéricos. Los resultados de la distancia euclidiana máxima, mínima y promedio se muestran en la Tabla 2 para cada valor de separación entre placas.

Tabla 2 Diferencia entre el cociente δ_T/δ de la solución de Poiseuille y la solución de Blasius.

Separación entre placas (m)	L^2_{\max}	L^2_{\min}
1	2.3138	1.2257
10	1.3358	0.7843
100	0.8516	0.3380
1000	0.3999	0.0761

Se observa que la distancia numérica entre ambas gráficas tiende a reducirse conforme aumenta la separación entre las placas, con lo cual se puede inducir que entre mayor es la separación de las placas, menores serán las distancias euclidianas entre los datos numéricos y la ecuación (1).

5. CONCLUSIONES

Tal como se hizo patente en la sección introductoria, se comprobó la suposición de que la diferencia entre las soluciones de Poiseuille y de Blasius disminuye conforme la separación entre las dos placas crece. Los resultados numéricos de la solución de Poiseuille ciertamente muestran, en términos geométricos, una tendencia bastante similar a la mostrada por la solución de Blasius; y esta tendencia se muestra más marcada entre mayor es la separación entre las placas para flujo de Poiseuille, tal y como se comprobó con el parámetro R^2 , cuyo mejor valor se obtuvo para la altura más grande evaluada, que fue de 1000m. También, a través del parámetro L^2 , se mostró que las distancias entre las curvas de datos numéricos, y las curvas de solución del problema de Blasius se reducen con el aumento de la separación entre placas para flujo de Poiseuille; de igual manera, los mejores valores de L^2 se obtuvieron para la separación de 1000m. Se puede concluir que la solución de Poiseuille se acerca a la solución de Blasius cuando la separación entre las placas tiende a infinito.

Ciertamente esto tiene implicaciones prácticas, pues este ejercicio es útil para validar los códigos de dinámica de fluidos computacional desarrollados por cuenta propia. Si se simula un flujo de Poiseuille entre dos placas planas y paralelas, y se muestra que al aumentar progresivamente la separación las placas la solución de Poiseuille tiende a la solución de Blasius, se puede decir que el código está bien implementado.

6. REFERENCIAS

- [1] H. Schlichting, K. Gersten, Boundary-Layer Theory, Berlin, Springer, 2016, p. 3.
- [2] A.C. Oliveira, A.C.L. Almeida, Numerical Solution of Boundary Layer Equations Based on Optimization: The Ostrach and Blasius Models, International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 113, Abril 2019, pp. 103-111.
- [3] I. Tani, History of Boundary-Layer Theory, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 9, Enero 1977, pp. 87-111.
- [4] S.A. Alameri, A.K. Alkaabi, Fundamentals of Nuclear Reactors, "Nuclear Reactor Technology Development and Utilization", Woodhead Publishing, 2020, pp. 1-26.

- [5] H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, vol. 56, Febrero 1908, pp. 1-37.
- [6] H.S Dou, No Existence and Smoothness of Solution of Navier-Stokes Equation, entropy, vol. 24, Febrero 2022, pp. 1-12.
- [7] F.M. White, Viscous Fluid Flow, Rhode Island, McGrawHill, 2006, p. 224.
- [8] J. Huang, J. Christ, M.N. Goltz, Analytical solutions for contaminant fate and transport in parallel plate fracture-rock matrix systems with poiseuille flow, Journal of Hydrology, vol. 596, Febrero 2021, pp. 126097.
- [9] Y.A. Cengel, A.J. Ghajar, Transferencia de Calor y Masa: Fundamentos y Aplicaciones, México, McGrawHill, 2011, p. 469.