

ESTUDIO DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN MEDIOS POROSOS

Acosta Hernández María Roxana, Chávez López Óscar Arturo, Rosas Yescas Israel, Ambriz Díaz Victor Manuel, Banda Tarín, Daniel, Andrés

Tecnológico Nacional de México/ I.T. Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Av. Tecnológico #2909
614-201-2000

mariaroxana.acosta@outlook.com, oscar.cl@chihuahua.tecnm.mx, israel.ry@chihuahua.tecnm.mx,
victor.ad@chihuahua.tecnm.mx, danytarin88@yahoo.com.mx

RESUMEN

Se presenta un análisis de los efectos del coeficiente de transferencia de calor en un medio poroso entre una fase líquida y una fase sólida que cuentan con una geometría cilíndrica. Para resolver este análisis se llevó a cabo un modelo adimensional que nos permitió disminuir la cantidad de variables en las ecuaciones. En este análisis se realizaron evaluaciones al coeficiente de transferencia de calor para valores de 1,10 y 1000. De la misma forma se asignaron diferentes valores de porosidad, como también variaciones para el número de Peclet para analizar el comportamiento de la transferencia de calor. Para valores grandes de porosidad y del coeficiente de transferencia de calor se presenta una tendencia a un estado de equilibrio térmico local, sin embargo, al incrementar el número de Peclet presenta el efecto opuesto y se tiende a un estado de desequilibrio térmico local.

ABSTRACT

An analysis the effects of the heat transfer coefficient on a porous medium between a liquid phase and a solid phase that have a cylindrical geometry is presented. To solve this analysis, a dimensionless model was carried out that allows us to reduce the number of equations. In this analysis, evaluations were made to the heat transfer coefficient for values of 1,10 and 1000. In the same way different porosity values were assigned, as well Peclet numbers variations to analyze the behavior of heat transfer. For large values of porosity and heat transfer coefficient there is a tendency to a state of local thermal equilibrium, however, increasing the Peclet numbers has the opposite effect and tends to a state of local thermal imbalance.

1. INTRODUCCIÓN

En el área de la ingeniería el análisis y aplicación de la teoría de equilibrio térmico local es de suma importancia debido a la gran variedad de aplicaciones como geotermia, acuíferos, etc. Según Michel Quintard y Stephen Whitaker [1], la condición de equilibrio térmico local llega cuando un proceso de transferencia de calor llega a cierta temperatura con la cual es casi la misma en todo el proceso. Además, mencionan que analizar un proceso de transferencia de calor en equilibrio térmico local ayuda a simplificar significativamente su análisis.

Sin embargo, cuando un proceso no se encuentra en equilibrio térmico local, su análisis implica el desarrollo y formulación de ecuaciones diferenciales que se pueden encontrar sumamente complicadas para realizar cálculos manuales, pues se realiza el análisis de dos fases con diferentes propiedades térmicas que se encuentran en contacto. Se considera que al paso del tiempo se puede llegar al estado de equilibrio térmico local, sin embargo, este tiempo puede variar según ciertas propiedades del material [2]. El equilibrio térmico local puede estar presente en cualquier medio poroso que presente conducción de calor al estar en contacto con temperaturas que no varían en el tiempo [3].

El estudio de transferencia de calor en medios porosos es un tema que ha sido tomado en cuenta en diversas investigaciones tanto experimentales como numéricas debido a la influencia en el proceso de transferencia de calor. En 2014 A. Barletta y D.A.S Ress publicaron una investigación donde se analiza la estabilidad de transferencia de calor en un medio poroso inclinado. En sus resultados, concluyeron que, al aumentar el ángulo de inclinación, esto trae consigo un incremento monótono de la estabilidad del flujo[4]. En 2002 Sung Jin Kim y Seok Pil Jang realizaron una investigación donde analizaron los efectos del número de Darcy, el número de Prandtl y el número de Reynolds en

el efecto de no equilibrio térmico local. Dentro de su investigación concluyeron que el equilibrio térmico local en un medio poroso se da cuando domina la transferencia de calor por conducción como consecuencia de una aproximación a cero de las variables anteriormente mencionadas. Aunque también mencionan que el equilibrio térmico local puede presentarse cuando el coeficiente de transferencia de calor intersticial es proporcional al número de Reynolds cuando este tiene una potencia mayor a uno[2].

En el análisis de transferencia de calor en medios porosos hay un coeficiente que permite simplificar y hacer un análisis más sencillo de las ecuaciones de transferencia de calor. Este es el coeficiente de transferencia de calor, comúnmente representado por una h y este depende en su mayoría de las propiedades del material y de otros factores como el número de Reynolds[5]. En varias investigaciones se ha buscado comprender mejor el comportamiento de este coeficiente. Braletta A. y Rees D.[5] realizaron una investigación donde analizaron la transferencia de calor por convección en una barra cilíndrica horizontal, donde resolvieron una serie de ecuaciones diferenciales. En este estudio encontraron que el coeficiente de transferencia de calor no varía en dirección del ángulo α (dirección tangencial) cuando se encuentra en un estado de equilibrio térmico local, sin embargo, este comienza a variar cuando comienza a presentarse el estado de no equilibrio térmico local. En 2014 se presentó una investigación[6] que aborda el efecto del coeficiente volumétrico de transferencia de calor en flujos de CO₂ en un sistema geotérmico, utilizando un modelo de no equilibrio térmico local. Donde al coeficiente volumétrico de transferencia de calor lo representan como ah , donde h representa el coeficiente de transferencia de calor y a la superficie específica. En sus resultados concluyeron que cuando ah tiende a infinito se presenta un estado de equilibrio térmico local, pues esto produce que el promediado de todas las temperaturas sea 1, es decir, $\Delta T=0$.

En esta investigación nos enfocaremos en estudiar y obtener el coeficiente de transferencia de calor en medios porosos mediante el uso de un software, que resuelve un sistema de ecuaciones diferenciales, desarrolladas mediante diferencias finitas, permitiéndonos obtener resultados de una forma más eficiente y precisa.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con la finalidad de calcular el coeficiente de transferencia de calor mediante el uso de un programa computacional, se planteó el análisis de un sistema de dos fases, compuesta por un medio sólido y líquido en contacto.

El análisis se realiza en un sistema unidimensional en z . Por lo tanto, el sistema nodal a analizar será como el de la Figura 1.

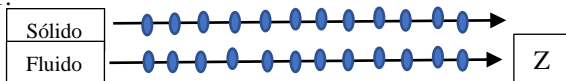


Figura 1 Sistema nodal del problema

Para su análisis supóngase que las fronteras se encuentran en un medio adiabático como se muestra en la Figura 2.

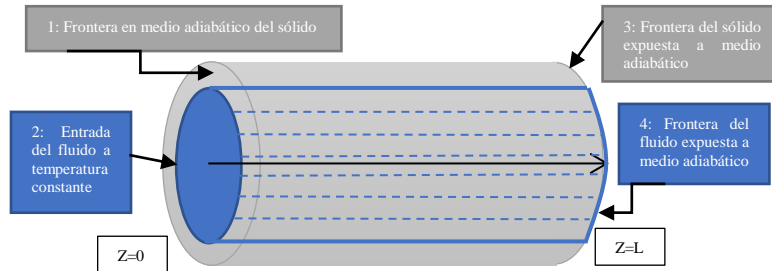


Figura 2 condiciones de frontera del problema.

Estas condiciones de frontera están dadas por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$i=0: T_i^n = T_2^n, \quad (1)$$

$$T_i^n = T_\infty^n, \quad (2)$$

$$i=L: T_{Ls}^n = T_{Ls-1}^n, \quad (3)$$

$$T_{Lf}^n = T_{Lf-1}^n. \quad (4)$$

Las condiciones de frontera que se muestran en la Figura 2, se encuentran discretizadas mediante las series de Taylor.

En el problema, la frontera 2 representa las condiciones de entrada del fluido y esta, está dada por la ecuación (2). Las fronteras 1, 3 y 4 se suponen adiabáticas y están dadas por las ecuaciones (1), (3) y (4) respectivamente.

Desarrollando este sistema de ecuaciones obtenidos a partir de las ecuaciones ya discretizadas (5) y (6), como también haciendo uso de un programa computacional podremos obtener el coeficiente de transferencia de calor que se presenta entre el sólido y el fluido.

3. MODELADO MATEMÁTICO

3.1 Modelo matemático

El análisis de transferencia de calor entre un sólido y un líquido necesita ser desarrollado a partir de las ecuaciones de difusión de calor del sólido y del fluido respectivamente que se presentan a continuación:

$$(\rho c)_s \frac{\partial T}{\partial t} = k_s \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (5)$$

$$(\rho c)_f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_s \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

donde ρ es la densidad, c el calor específico, k_s la conductividad térmica del sólido, k_f la conductividad térmica del fluido r son las coordenadas radiales, z representa las coordenadas en dirección z , v la velocidad del fluido, T la temperatura y t el tiempo.

Para este caso de estudio las ecuaciones (5) y (6) se presentarán en coordenadas cilíndricas, donde no se tomarán en cuenta las coordenadas angulares.

El desarrollo de estas ecuaciones resulta sumamente complicado, y aún más si el análisis se realiza en tres ejes. Estas ecuaciones se pueden reducir si se implementa el uso de un coeficiente de transferencia de calor h , que permite reducir considerablemente el desarrollo y análisis de estas ecuaciones. De tal forma que las ecuaciones que se utilizarán para este caso de estudio son las siguientes:

$$(1-\phi)(\rho c)_s \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = (1-\phi)k_s \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + h(T_f - T_s), \quad (7)$$

$$\phi \rho c_f \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c v \frac{\partial T}{\partial z} = \phi k_f \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + h(T_s - T_f). \quad (8)$$

Donde ϕ y h representan la porosidad del material y el coeficiente de transferencia de calor respectivamente.

3.1 Modelo adimensional

Con el fin de reducir el número de variables, además de obtener soluciones generales se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_{inicial} - T_\infty}, \quad \xi = \frac{z}{L} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{k_f t}{(\rho c)_f L^2}, \quad (9)$$

donde θ , η y τ son la temperatura, coordenada longitudinal y tiempo adimensionales respectivamente.

El correspondiente modelo adimensional para el fluido queda de la siguiente manera:

$$\phi \frac{\partial \theta_f}{\partial \tau} + Pe \frac{\partial \theta_f}{\partial \xi} = \phi \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \xi^2} + \frac{hL^2}{k_f} (\theta_s - \theta_f) \quad (10)$$

Por otro lado, el modelo adimensional referente a la fase sólida queda determinado de la siguiente manera:

$$(1-\phi) \frac{\alpha_f}{\alpha_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial \tau} = (1-\phi) \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial \xi^2} + \frac{k_f}{k_s} \frac{hL^2}{k_f} (\theta_f - \theta_s), \quad (11)$$

donde α y Pe son la difusividad térmica y el número de Peclet, respectivamente, además se observa que surge otro parámetro adimensional definido de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{hL^2}{k_f}, \quad (12)$$

dicho parámetro ofrece la información de cuanta energía pierde o gana alguna de las fases, por lo que si $\lambda \rightarrow 0$ la transferencia de calor entre fases es casi nula, por el contrario, si $\lambda \rightarrow \infty$ existirá equilibrio térmico local.

3.2 Método numérico

En esta investigación, se utiliza el método de elementos finitos. Este método se utilizó para resolver las ecuaciones diferenciales parciales, permitiéndonos convertirlas en un sistema de ecuaciones[7].

Con este método podemos aproximar la solución de la ecuación diferencial teniendo como resultado un numero finito de ecuaciones algebraicas[8]. Para plantear el sistema de ecuaciones se analiza una malla de $n \times m$ nodos, donde cada nodo representa una incógnita que se resolverá con una ecuación algebraica desarrollada por el método de diferencias finitas.

Para realizar la solución a las ecuaciones diferenciales parciales, se realiza una discretización a cada elemento de la ecuación diferencial parcial.

Las ecuaciones (7) y (8) son analizadas en una dimensión, además en estas tomaremos en cuenta la porosidad del material que es un punto clave para el objetivo de esta investigación.

Para resolver estas ecuaciones será utilizado el método de diferencias finitas, en la que hacemos uso de las series de Taylor. De esta forma, la ecuación del solido queda expresada de la siguiente manera:

$$(1-\phi)(\rho c)_s \left(\frac{T_{is+1}^n - T_{is}^n}{\Delta T} \right) = (1-\phi)k_s \left(\frac{T_{is+1}^n - 2T_{is}^n + T_{is-1}^n}{\Delta z^2} \right) + h(T_{if}^n - T_{is}^n). \quad (13)$$

Se utiliza la misma metodología para resolver la ecuación del fluido, que resulta expresada de la siguiente forma:

$$\phi(\rho c)_f \left(\frac{T_{if}^{n+1} - T_{if}^n}{\Delta z} + v \frac{T_{if+1}^n - T_{if-1}^n}{2\Delta z} \right) = \phi k_f \left(\frac{T_{if+1}^n + 2T_{if}^n + T_{if-1}^n}{\Delta z^2} \right) + h(T_{is}^n - T_{if}^n). \quad (14)$$

RESULTADOS

En los modelos matemáticos ecs. (10) y (11) se observa que el comportamiento del fenómeno físico depende del coeficiente adimensional de transferencia de calor λ , el número de Peclet Pe y la porosidad ϕ .

Con el fin de observar el efecto del coeficiente de transferencia de calor λ se seleccionan los valores 1, 10 y 1000, en conjunto para un valor de porosidad $\phi = 0.5$ y $Pe = 10$.

3.3 Efecto del coeficiente de transferencia de calor λ .

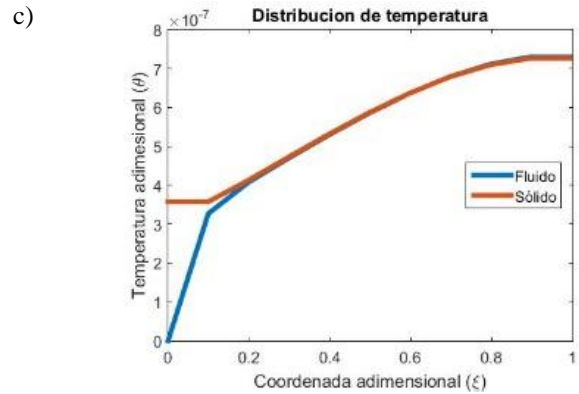
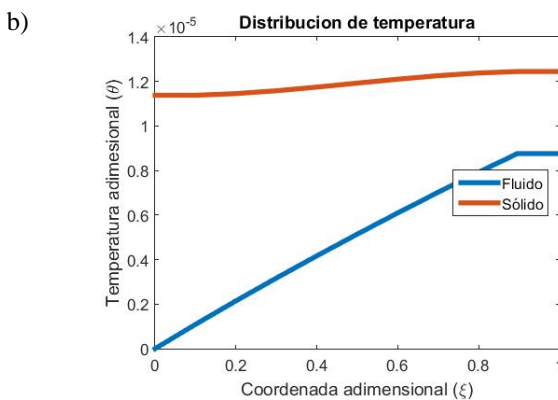
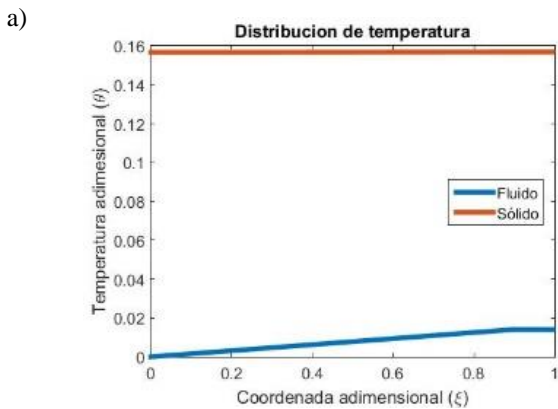
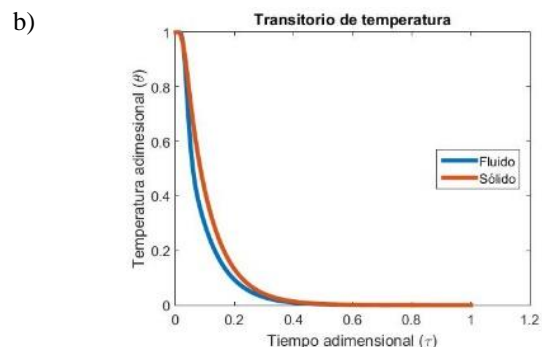
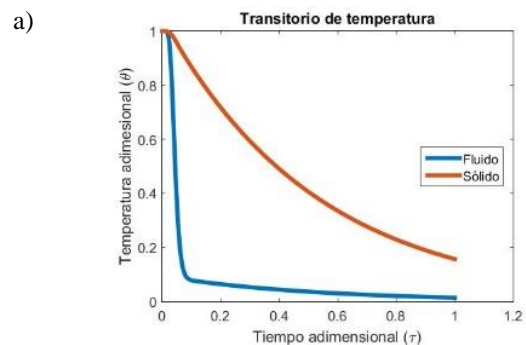


Figura 3. Distribución de temperaturas adimensionales del sólido y fluido para a) $\lambda = 1$, b) $\lambda = 10$ y c) $\lambda = 1000$.

La Figura 3 muestra la distribución de temperaturas a lo largo del medio poroso, donde claramente se observa que para el caso $\lambda = 1$, la temperatura del sólido está completamente separada de la distribución de temperatura de la fase líquida, además se observa que conforme aumenta el valor de λ ambas curvas se van aproximando como se observa en la Figura 3b. Finalmente cuando el valor de λ tiene un valor muy grande, la distribución de temperaturas es prácticamente el mismo, por lo que se puede decir que existe equilibrio térmico local como se muestra en la Figura 3c.



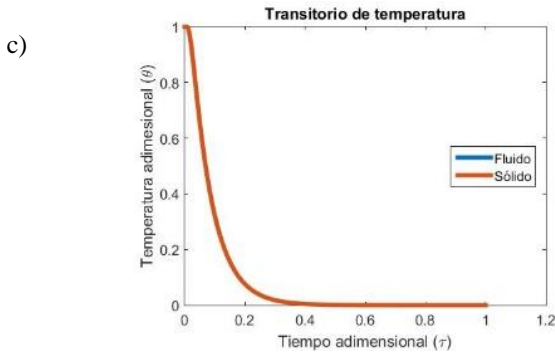


Figura 4. Comportamiento de la temperatura adimensional del sólido y fluido en estado transitorio para a) $\lambda = 1$, b) $\lambda = 10$ y c) $\lambda = 1000$.

En la figura 4 se observa el comportamiento del estado transitorio, donde claramente se observa en la figura 4a que la fase de fluido se llega rápidamente al estado permanente mientras que en el sólido aun tarda en llegar esto debido a que $\lambda = 1$, siendo un valor muy bajo por lo que la interacción entre ambas fases es muy pequeña, por otro lado, para $\lambda = 10$ (Fig 4b) se observa un comportamiento similar entre ambas fases, debido a que al aumentar el valor de λ , aumenta también la interacción entre las fases. Finalmente, en la figura 4c, para $\lambda = 1000$ se observa que prácticamente ambas curvas se desarrollan de la misma manera, considerándose así, equilibrio térmico local.

Con el fin de tener un criterio cuantitativo que nos permita determinar si existe el equilibrio térmico local o no, se definió un parámetro el cual está determinado por el cociente del promedio de temperaturas en la fase líquida entre el promedio temperaturas de la fase sólida.

$$F = \frac{\frac{1}{Vol_f} \int_0^L 2\pi r_i^2 T(z) dz}{\frac{1}{Vol_s} \int_0^L 2\pi (R^2 - r_i^2) T(z) dz} \quad (15),$$

Reescribiendo la ecuación (15) de forma adimensional queda de la siguiente manera:

$$F = \frac{\int_0^1 \theta_f d\xi}{\int_0^1 \theta_s d\xi} \quad (16)$$

El factor F comienza desde 1 ya que la condición inicial es que ambas fases comienzan a la misma temperatura, y al inyectarse fluido frío el factor va a variar, cuando el factor tienda a 1 significa que existe equilibrio térmico local y

cuando esté más cercano a 0 significa que dicha consideración ya no puede realizarse. En la figura 5 se muestra el comportamiento del factor F , en donde se observa de manera cuantitativa, lo que en figuras 3 y 4 se podía apreciar de manera cualitativa. En la figura 5a se observa que $F = 0.0491$ por lo que al ser un valor cercano a cero no es posible hacer la consideración de equilibrio térmico local, en la figura 5b $F = 0.4174$ por lo que se tiene una situación intermedia, por otro lado, en la figura 5c el valor $F = 0.9622$, el valor tiende a uno, por lo que es posible hacer uso de la teoría de equilibrio térmico local.

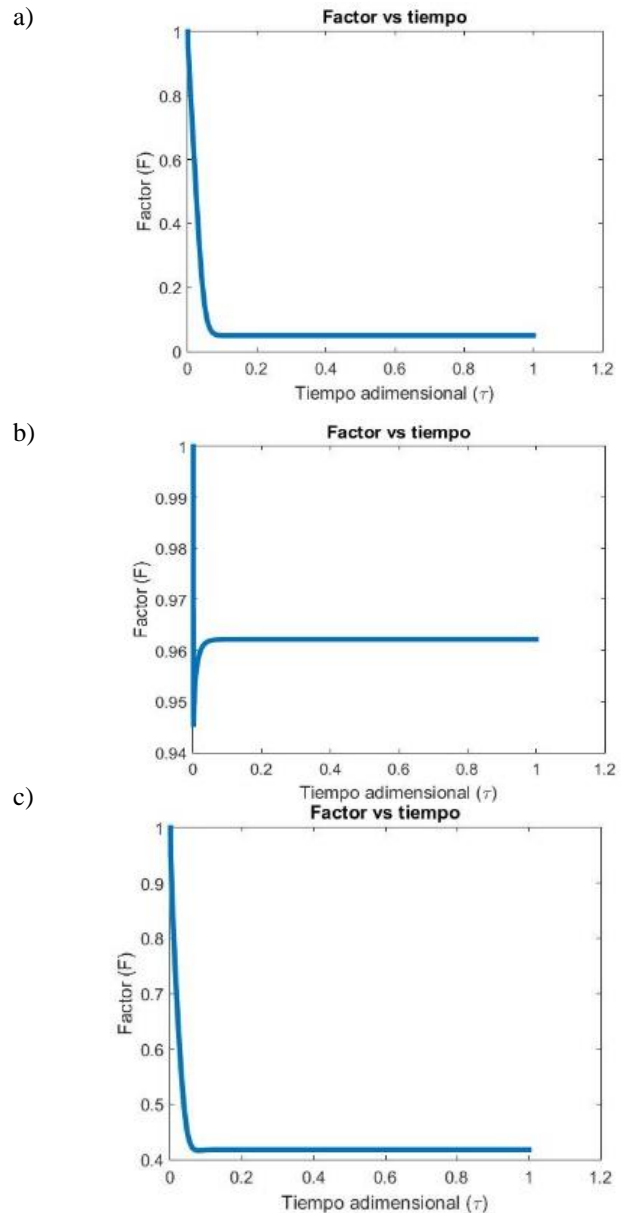


Figura 5. Comportamiento de la temperatura adimensional del sólido y fluido en estado transitorio para a) $\lambda = 1$, b) $\lambda = 10$ y c) $\lambda = 1000$.

Una vez establecido un parámetro que indique cuando es posible usar la teoría de equilibrio térmico local es posible estudiar el efecto que tienen las distintas variables que involucran en el problema. La figura 6 muestra el efecto que tiene el coeficiente de transferencia de calor, en este caso como se esperaba, conforme aumenta el valor de λ , $F \rightarrow 1$, debido a que ese término es el que acopla ambos modelos.

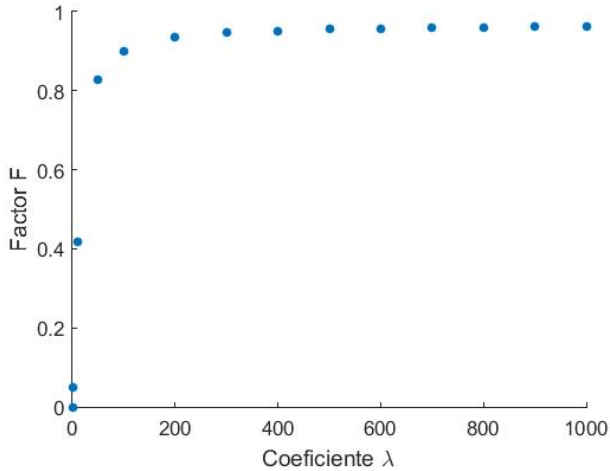


Figura 6. Variación del coeficiente λ en el factor F para $Pe = 10$ y $\phi = 0.5$.

3.4 Efecto de la porosidad ϕ

Con el fin de observar el efecto de la porosidad en la consideración de equilibrio térmico local, se consideraron variaciones de la porosidad desde 0.1 hasta 0.99 manteniendo fijos los valores de $Pe = 10$ y $\lambda = 10$.

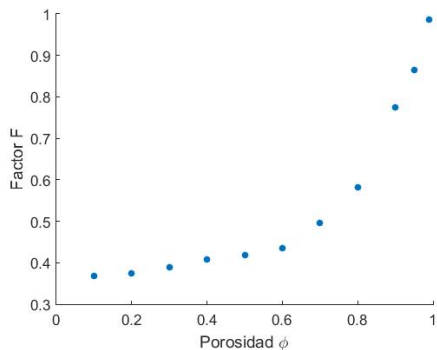


Figura 7. Efecto de la porosidad ϕ en el factor de equilibrio térmico local F .

En la figura 7 se muestra que conforme aumenta la porosidad también aumenta el valor del factor de equilibrio térmico

local, esto se debe principalmente a que al aumentar la porosidad disminuye la cantidad de materia de la fase sólida y no permite tener gradientes significantes, aunque vale la pena mencionar que se seleccionó un número de Peclet pequeño principalmente para dar oportunidad a ambas fases de realizar un intercambio de energía.

3.5 Efecto número de Peclet Pe .

Para observar la influencia del número de Peclet se realizaron simulaciones variando el número de Peclet desde 10 hasta 1000, manteniendo el coeficiente $\lambda = 1000$ y $\phi = 0.5$.

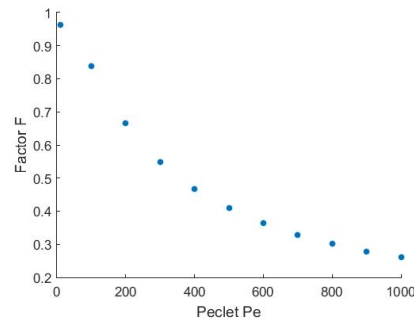


Figura 8. Efecto del número de Peclet en el factor F

En la figura 8 se muestra como al aumentar el Peclet disminuye el factor de equilibrio térmico local, esto se debe principalmente a que al estar involucrada la velocidad, implica que el a mayor Peclet mayor velocidad, por lo que se tiene poco tiempo de transferencia de calor.

4. CONCLUSIONES

En el presente estudio se muestra los efectos del coeficiente de transferencia de calor cuando se pone en contacto una fase sólida y otra líquida. En base a esto se puede llegar a tres conclusiones:

1. Al analizar la transferencia de calor con valores para el coeficiente λ de 1, 10 y 1000 se puede observar que al incrementa el valor de este coeficiente se tiende a un estado de equilibrio térmico local pues como se puede observar en la figura 3c, ambas fases tienden a una misma temperatura a diferencia de la 3a que nos muestra una considerable diferencia de temperaturas entre las dos fases. También se puede ver este mismo fenómeno en la figura 5, donde se obtiene un promedio en la distribución de temperaturas, dando a conocer que para un coeficiente de transferencia de calor de 1000 obtenemos $F = 0.9622$ confirmando que entre mas grande sea el coeficiente de transferencia de calor, las fases tienden a una condición de equilibrio térmico local.

2. El valor de porosidad es un parámetro que puede afectar considerablemente el estado de equilibrio térmico local. Se puede observar que al incrementar la porosidad se tiende a un estado de equilibrio térmico local debido a la disminución de material en la fase sólida.
3. El número de Peclet representa un factor importante para en análisis de transferencia de calor pues, como se puede observar en la figura 8 al incrementar el valor de Pe , el Factor de equilibrio térmico local F tiende a 0 demostrando una ausencia de equilibrio térmico local pues al incrementar el número de Peclet involucra un aumento en la velocidad del fluido dando poca oportunidad de realizar la transferencia de calor.

5. REFERENCIAS

- [1] M. Quintard and S. Whitaker, "Local thermal equilibrium for transient heat conduction: theory and comparison with numerical experiments," 1995.
- [2] S. Jin Kim and S. Pil Jang, "Effects of the Darcy number, the Prandtl number, and the Reynolds number on local thermal non-equilibrium." [Online]. Available: www.elsevier.com/locate/ijhmt
- [3] P. Vadasz, "On the paradox of heat conduction in porous media subject to lack of local thermal equilibrium," *Int J Heat Mass Transf.*, vol. 50, no. 21–22, pp. 4131–4140, Oct. 2007, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.03.017.
- [4] A. Nouri-Borujerdi, A. R. Noghrehabadi, and D. A. S. Rees, "The effect of local thermal non-equilibrium on impulsive conduction in porous media," *Int J Heat Mass Transf.*, vol. 50, no. 15–16, pp. 3244–3249, Jul. 2007, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.12.016.
- [5] A. Barletta and D. A. S. Rees, "Local thermal non-equilibrium analysis of the thermoconvective instability in an inclined porous layer," *Int J Heat Mass Transf.*, vol. 83, pp. 327–336, 2015, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.12.006.
- [6] L. Zhang, F. Luo, R. Xu, P. Jiang, and H. Liu, "Heat transfer and fluid transport of supercritical CO₂ in enhanced geothermal system with local thermal non-equilibrium model," in *Energy Procedia*, Elsevier Ltd, 2014, pp. 7644–7650. doi: 10.1016/j.egypro.2014.11.798.
- [7] I. Anjum Badruddin, Z. A. Zainal, P. A. Aswatha Narayana, and K. N. Seetharamu, "Thermal non-equilibrium modeling of heat transfer through vertical annulus embedded with porous medium," *Int J Heat Mass Transf.*, vol. 49, no. 25–26, pp. 4955–4965, Dec. 2006, doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.05.043.
- [8] A. Carrillo Ledesma, K. I. González Rosas, and O. Mendoza Bernal, "Introducción al Método de Diferencias Finitas y su Implementación Computacional." [Online]. Available: <http://academicos.fciencias.unam.mx/antoniocarrilloUnacopiadeestetrabajosepuededescargardelapágina:https://sites.google.com/ciencias.unam.mx/acl/en-desarrollo>