REVISTA ELECTRO, Vol. 44 pp. 140-144, Oct 2022, Chihuahua, Chih. México
http:// electro.itchihuahua.edu.mx/revista
ISSN 1405-2172

IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DEL VOLUMEN FINITO PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES PARA FLUJO DE POISEUILLE EN RÉGIMEN LAMINAR INCOMPRESIBLE

Muro Teruel Luis Enrique
Tecnológico Nacional de México Campus Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Av. Tecnológico #2909
614-201-2000
lmuro0436@gmail.com

Chávez López Óscar Arturo
Tecnológico Nacional de México Campus Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Av. Tecnológico #2909
614-201-2000
oscar.cl@chihuahua.tecnm.mx

Ambriz Díaz Víctor Manuel
Tecnológico Nacional de México Campus Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Av. Tecnológico #2909
614-201-2000
victor.ad@chihuahua.tecnm.mx

Rosas Yescas Israel
Tecnológico Nacional de México Campus Chihuahua
División de Estudios de Posgrado e Investigación
Av. Tecnológico #2909
614-201-2000
israel.ry@chihuahua.tecnm.mx

RESUMEN.

El presente trabajo muestra el desarrollo de un programa para resolver de forma numérica las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo de Poiseuille en régimen laminar de un fluido incompresible. Se empleó para ello una discretización en volúmenes finitos del dominio, así como el algoritmo SIMPLE para resolver el sistema de ecuaciones resultante de dicha discretización.

Los resultados fueron contrastados con la solución analítica al problema de Poiseuille, con una relación experimental para la determinación de la longitud de entrada, y también con resultados arrojados por ANSYS FLUENT, concluyendo en los tres casos que la solución arrojada por el programa desarrollado es válida.

Palabras clave: volumen finito, solución numérica, dinámica de fluidos

ABSTRACT.

In this paper, the development of a software for obtaining a numerical solution to the Navier-Stokes equations is shown for the case of Poiseuille flow in laminar regime, and for an incompressible fluid. A finite volume discretization for the domain was used, as well as the SIMPLE algorithm for solving the resultant system of equations.

The results were compared to the analytical solution of the Poiseuille problem, to an experimental relation for determining the entrance length, and to the results showed by ANSYS FLUENT, concluding in all cases that the solution of the software is valid.

Keywords: finite volume, numerical solution, fluid dynamics.

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente, el diseño en ingeniería ha debido sobreponerse a las dificultades involucradas en el estudio de fenómenos de gran complejidad, haciendo uso de una serie de conocimientos tanto científicos, como empíricos. El enfoque más tradicionalmente empleado es de la experimentación, con la cual se realizan pruebas sobre un prototipo en condiciones similares a las que estará sometido el dispositivo que se desea diseñar; los resultados de estas pruebas permitirán determinar la eficacia y la eficiencia con la que el dispositivo cumplirá sus funciones, así como su capacidad para resistir condiciones adversas [1].

Con el pasar del tiempo, la creciente necesidad de preservar los recursos naturales ha impulsado que la filosofía del diseño ingenieril se oriente hacia la optimización [1]. Lo anterior requiere evaluar el desempeño de distintos diseños para un mismo dispositivo bajo las mismas condiciones, a fin de poder elegir la mejor opción; lograr esto mediante el uso exclusivo de la experimentación conlleva varios inconvenientes, entre los que destacan:

• El número de pruebas necesarias para determinar el diseño óptimo puede ser muy grande, lo que implica gastos económicos y de tiempo considerables.

• Algunos aspectos del diseño no pueden ser estudiados con facilidad por métodos experimentales, ya sea por cuestiones de escala, de accesibilidad, de medición o de tiempo.

Estos problemas han propiciado la búsqueda e implementación de otras alternativas que complementen los resultados experimentales y faciliten las labores de optimización en el diseño; una de estas alternativas es recurrir a los modelos de la física teórica [2]. El comportamiento de un fenómeno puede ser descrito mediante una serie de principios físicos elementales, tales como los de conservación y balance; de estos principios se derivan ecuaciones matemáticas que relacionan algunas propiedades de interés, así como también muestran la evolución de éstas en el tiempo y en el espacio. Puede emplearse esta información para hacer predicciones sobre el desempeño de alguna propuesta de diseño, a su vez que se eliminan muchas de las barreras de los métodos experimentales.

Si bien muchos de los modelos matemáticos con relevancia práctica son inabordables por medios analíticos, los avances en computación de las últimas décadas han provisto a la humanidad de equipos con una gran capacidad de cálculo, lo cual permite que la obtención de una solución numérica de estos modelos sea una tarea relativamente sencilla [3]. La industria actual demanda cada vez más de herramientas computacionales para la simulación de fenómenos físicos (normalmente conocidas como Ingeniería Asistida por Computadora, o CAE por sus siglas en inglés), con lo cual,

todo ingeniero que pretenda incursionar en el diseño debe poseer conocimientos en este campo.

Una de las ramas de la física e ingeniería en la que las herramientas CAE han adquirido gran relevancia, es en la dinámica de fluidos. Casi la totalidad de los fenómenos abarcados en el estudio de esta rama se rigen por los principios de conservación de masa y de cantidad de movimiento; ambos principios se traducen al lenguaje matemático como un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que, para el caso de un fluido newtoniano, se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes [2]. Si bien, la solución analítica de estas ecuaciones se limita a geometrías simples y casos donde se eliminan los términos no lineales, el empleo de herramientas computacionales permite la obtención de una solución numérica para éstas, lo que extiende su campo de aplicación a casos de interés práctico en la ingeniería, tales como el diseño de máquinas y sistemas hidráulicos, así como los análisis de aerodinámica [4].

De entre las aplicaciones más importantes de la dinámica de fluidos, se encuentra el estudio de flujos del tipo interno, entre los que destaca el flujo de Poiseuille. Éste consiste en un flujo bidimensional a través de un canal confinado por dos superficies paralelas, donde, tras cierta distancia recorrida (conocida como longitud de entrada), la distribución de velocidad adquiere un perfil parabólico a lo largo del eje transversal [5]. Sí bien las herramientas CAE no fungen sustituto de las pruebas experimentales, sino más bien como un complemento de éstas, el empleo de alguna herramienta informática puede optimizar el estudio de fenómenos relacionados con el flujo interno, en cuestiones tales como la determinación de la longitud de entrada, cálculo de caídas de presión, e inclusive fenómenos relacionados con la transferencia de calor.

El presente trabajo muestra el desarrollo de un programa para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible de Poiseuille en régimen laminar, que podrá ser empleado a futuro para facilitar el estudio de los fenómenos relacionados a esta clase de flujo.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción al problema de dinámica de fluidos

En el análisis clásico del movimiento de los fluidos, se asume que éstos son un conjunto de infinitas partículas limitadas a una región del espacio, y entre las cuales no existen discontinuidades (se asume al fluido como un medio continuo); lo anterior permite que la descripción matemática de las propiedades del fluido pueda llevarse a cabo mediante funciones continuas.

Bajo la hipótesis del medio continuo, los fenómenos estudiados por la mecánica de fluidos pueden describirse a partir de los principios de conservación de masa y de cantidad de movimiento. Cuando el fluido en cuestión es Newtoniano, estos principios dan como resultado las ecuaciones de Navier-Stokes [6]:

$$\nabla\cdot\vec{v}=0, \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)=-\nabla P+\mu\nabla^2\vec{v}+\rho\vec{b}\,. \tag{2}$$

Estas ecuaciones permiten modelar matemáticamente muchos problemas prácticos de la mecánica de fluidos. Para fines de este trabajo, pueden modelar el flujo de Poiseuille, que es una simplificación bidimensional del flujo a través de tuberías o canales, tal y como se muestra en la Figura 1.

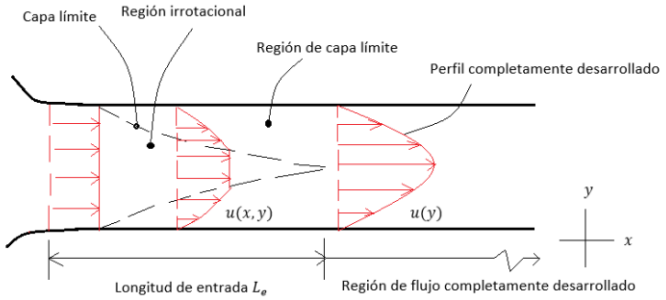

Figura 1 Flujo a través de una tubería.

Nótese como el flujo se divide en dos regiones: la región de capa límite (donde los efectos viscosos afectan el perfil de velocidad a lo largo del diámetro de la tubería), y la región irrotacional (donde el perfil de velocidad permanece fundamentalmente uniforme). La capa límite aumenta su espesor conforme el fluido avanza por la tubería, hasta llegado un punto donde ésta abarca toda la región de flujo; se dice entonces que el flujo está completamente desarrollado, y más allá de este punto el perfil de velocidad es parabólico e invariante a lo largo del eje longitudinal [5]. Por otro lado, a la longitud en la cual el flujo se encuentra en desarrollo, se le conoce como longitud de entrada, y para flujo laminar se puede determinar mediante la expresión [5]:

$$L_e\approx 0.05\,\mathrm{Re}\,D\,. \tag{3}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes tienen solución analítica para el flujo completamente desarrollado; dicha solución es la siguiente:

$$\vec{v}(y)=\left(-\frac{6\bar{u}}{D^2}y^2+\frac{6\bar{u}}{D}y\right)\hat{i}\,, \tag{4}$$

$$P(x)=-\frac{12\mu\bar{u}}{D^2}x+P_0\,. \tag{5}$$

La solución anterior sirve como referencia para la validación de los resultados numéricos obtenidos.

2.2. Método del volumen finito

El método del volumen finito es un método de discretización para la solución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Parte de la idea de que, si cierta ecuación de transporte se cumple en un determinado dominio, entonces la misma ecuación debe cumplirse también en regiones más pequeñas dentro de dicho dominio [1].

Considérese un dominio limitado en una región plana y rectangular como la que se muestra en la Figura 2.

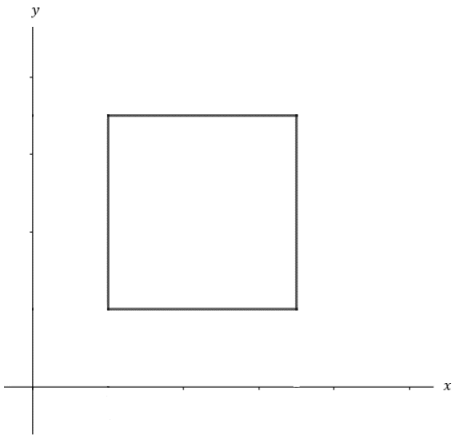

Figura 2 Región plana rectangular..

Supóngase que sobre dicho dominio se cumple la ecuación general de convección-difusión de la propiedad de transporte ϕ [7]:

$$\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\phi\right)+\nabla\cdot\left(\rho\Gamma\nabla\phi\right)=\rho k\,. \qquad (6)$$

Se divide entonces el dominio original en subdominios, tal y como se muestra en la Figura 3.

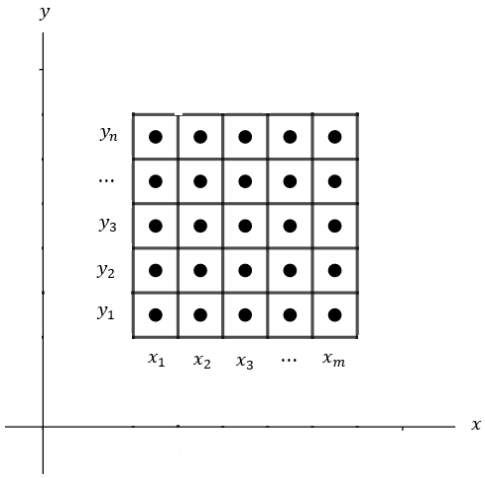

Figura 3 División del dominio en subdominios.

Ahora, sobre cada subdominio se integra la ecuación (6):

$$\int_{V_{i,j}}\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\phi\right)dV+\int_{V_{i,j}}\nabla\cdot\left(\rho\Gamma\nabla\phi\right)dV=\int_{V_{i,j}}\rho k dV\,. \qquad (7)$$

A partir de series de Taylor truncadas al primer término, es posible aproximar cada una de las integrales de la ecuación (7) en expresiones algebraicas:

$$\int_{V_{i,j}}\nabla\cdot\left(\rho\vec{v}\phi\right)dV\approx\sum_{m=1}^{4}\left(\rho\vec{v}\phi\right)_{i,j}S_m\,, \qquad (8)$$

$$\int_{V_{i,j}}\nabla\cdot\left(\rho\Gamma\nabla\phi\right)dV\approx\sum_{m=1}^{4}\left(\rho\Gamma\nabla\phi\right)_{i,j}S_m\,, \qquad (9)$$

$$\int_{V_{i,j}}\rho k dV\approx\left(\rho k\right)_{i,j}V_{i,j}\,. \qquad (10)$$

Debido al truncamiento, el error de las aproximaciones anteriores es del orden $O(h^2)$, con lo cual, el error se reduce de forma proporcional al cuadrado de la longitud de cada celda. De esta manera, se tiene una ecuación por cada subdominio, y por ende un sistema de ecuaciones, donde las incógnitas son los valores promedio de ϕ en cada subdominio. Teóricamente, la solución debe ser más aproximada a la solución real entre mayor sea la cantidad de subdominios [1].

3. DESARROLLO PRÁCTCO

A fin de implementar la solución numérica para las ecuaciones de Navier-Stokes, se empleó un sistema de coordenadas cartesianas y se consideró la geometría bidimensional que se muestra en la Figura 4.

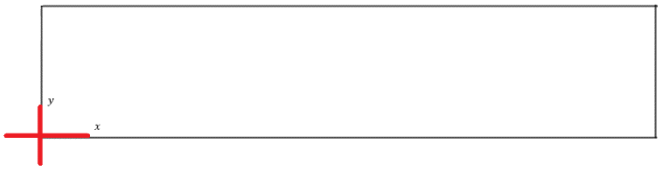

Figura 4 Dominio de flujo.

Para flujo laminar incompresible de Poiseuille, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\,, \qquad (11)$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2\right)+\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(uv\right)-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial P}{\partial x}\,, \qquad (12)$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(uv\right)+\rho\frac{\partial}{\partial y}\left(v^2\right)-\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial P}{\partial y}\,. \qquad (13)$$

Las condiciones de frontera se muestran en la Figura 5. La frontera 1 representa la entrada del fluido, y se define un perfil uniforme de velocidad en la dirección x. La frontera 2 representa la descarga del fluido, y está colocada lo suficientemente lejos del área de interés, a fin de poder suponer que el gradiente de velocidad en dicha frontera es nulo; en esta frontera se define también una presión de referencia de 0. Las fronteras 3 y 4 representan las paredes de la tubería, y en ellas se cumple la condición de no deslizamiento.

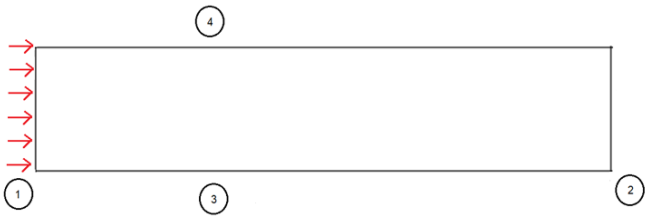

Figura 5 Condiciones de frontera del problema.

La discretización del dominio se realizó con elementos rectangulares, tal y como se muestra en la Figura 6.

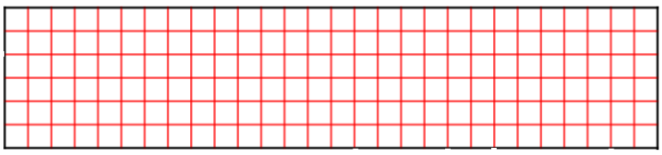

Figura 6 Malla numérica.

Se discretizaron las ecuaciones (8), (9) y (10), empleando la técnica de los volúmenes finitos descrita anteriormente. Para la solución del sistema de ecuaciones resultante, se empleó el algoritmo SIMPLE, el cual se resume en el diagrama mostrado en la Figura 7 [2].

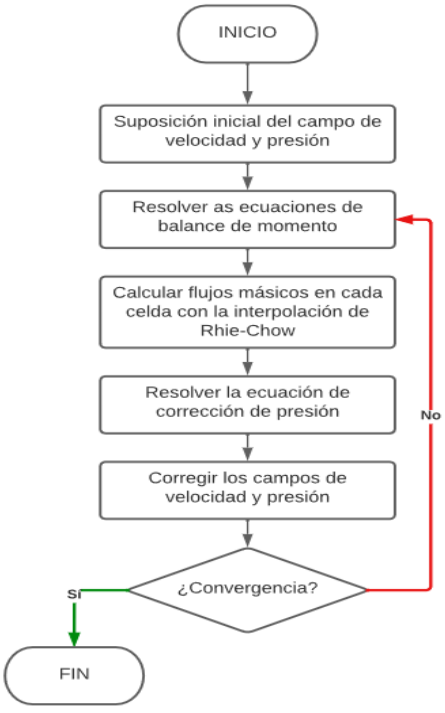

Figura 7 Descripción del algoritmo SIMPLE

4. RESULTADOS Y VALIDACIÓN

4.1 Resultados

Para fines del proyecto, se consideró en todos los casos las propiedades de la glicerina a 20°C, así como una tubería de 50cm de largo. Se ejecutó la solución del problema para distintos diámetros de tubería y distintas velocidades de entrada. En este trabajo sólo se muestra el caso de una tubería con un diámetro de 15cm, y una velocidad de entrada de 15cm/s.

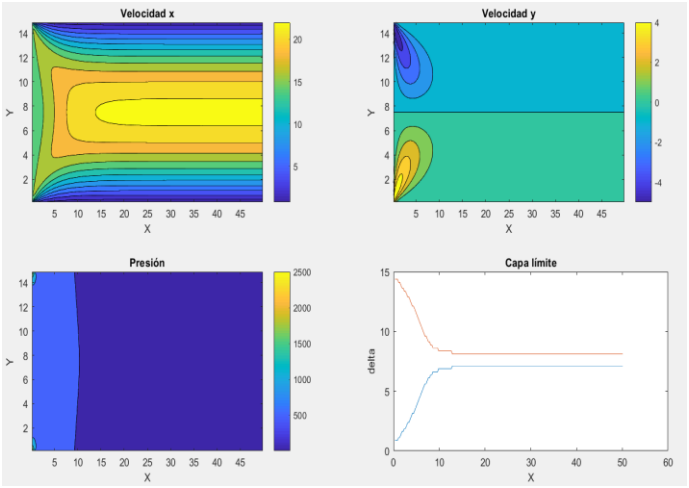

Figura 8 Resultados obtenidos para una tubería de 15cm de diámetro, 50cm de largo, donde fluye glicerina a 20°C, con velocidad de entrada de 15cm/s.

4.2 Validación

La validación se realizó de tres formas distintas.

Primero se comparó la solución numérica mostrada en los resultados con la solución analítica que se muestra en las ecuaciones (4) y (5). Dicha comparación se muestra en las Figuras 9 y 10.

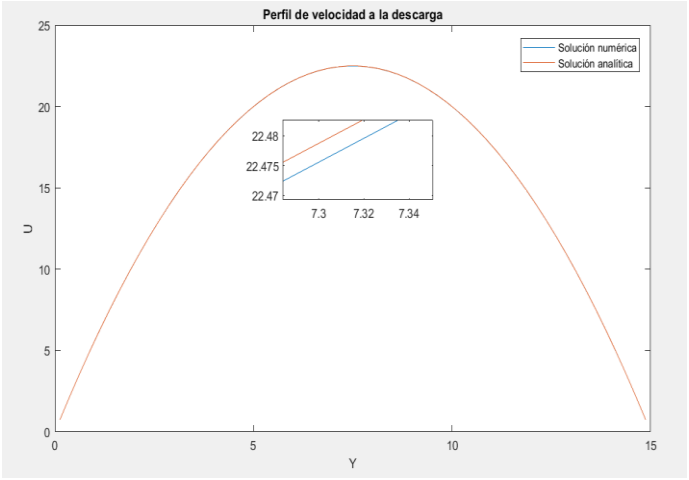

Figura 9 Comparación del perfil de velocidad a la descarga, de acuerdo con la solución analítica y la solución numérica.

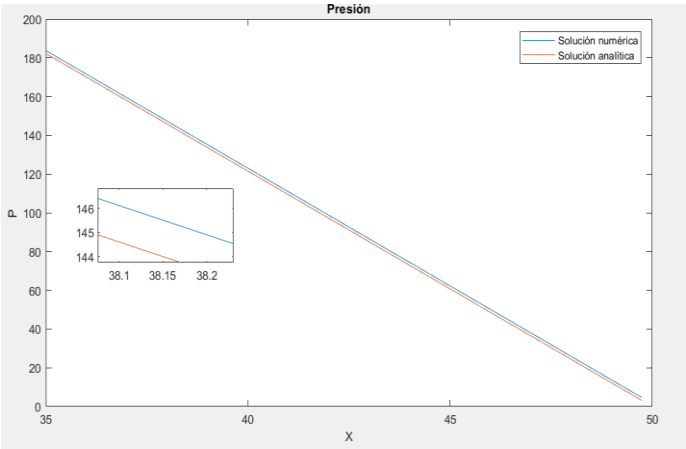

Figura 10 Comparación de la caída de presión a lo largo de la tubería, de acuerdo con la solución analítica y la solución numérica.

Ambas gráficas están casi sobrepuestas en cada imagen, la vista auxiliar aumentada ayuda a apreciar mejor la diferencia entre ambas.

La segunda forma de validar los resultados, fue comparando la longitud de entrada según la solución numérica, y según la ecuación (3). Para este caso en particular, la ecuación (3) arroja un resultado de 14.042cm para la longitud de entrada, en tanto que la solución numérica indica un valor de 12.88cm; el error relativo es de 8.28%.

Por último, se compararon los resultados arrojados por ANSYS FLUENT con los obtenidos numéricamente. Dicha comparación se presenta en la Figura 11.

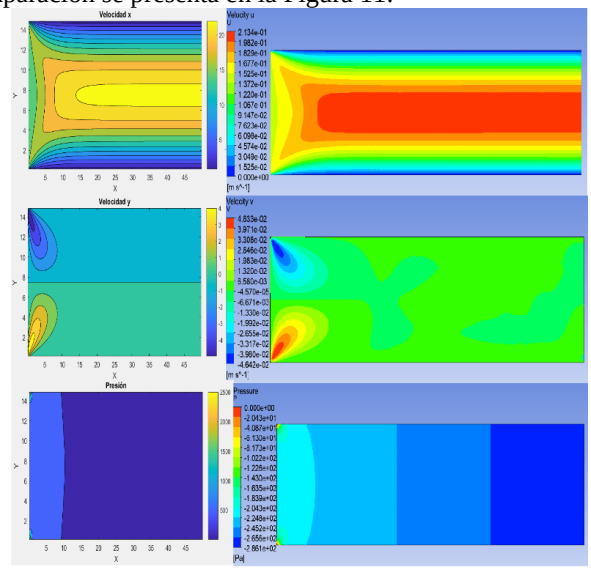

Figura 11 Comparación de los resultados numéricos obtenidos, y los arrojados por ANSYS FLUENT.

Ambos mapas de contorno son muy similares, tanto en aspecto, como en valores numéricos (con la diferencia de que ANSYS FLUENT define la entrada de la tubería como la frontera de presión nula).

5. CONCLUSIONES

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo laminar incompresible de Poiseuille fueron resueltas de forma satisfactoria por el programa desarrollado a lo largo del presente trabajo. En flujo completamente desarrollado, la solución muestra un comportamiento parabólico muy similar a aquél de la solución analítica al problema de Poiseuille, por lo que los resultados pueden considerarse válidos para este régimen de flujo.

A su vez, la solución arrojada por ANSYS FLUENT (el cual, al ser un programa comercial, ya ha sido validado) muestra resultados muy similares a los del software desarrollado en este trabajo, tanto para el flujo en desarrollo con para flujo completamente desarrollado, con lo cual, los resultados también pueden considerarse válidos desde esta perspectiva.

Las mayores discrepancias se observan en la predicción de la longitud de entrada de acuerdo con la ecuación (3). Aunque las diferencias son, en algunos casos, notables, tampoco son lo suficientemente grandes como para considerar que la solución numérica arrojada por el programa es poco realista. Dos aspectos importantes deben resaltarse: primero, la ecuación (3) es una aproximación que no debería ser tomada como una relación exacta; segundo, el software considera una realidad bidimensional, en la cual no se toma en cuenta la geometría cilíndrica de la tubería real, lo que pudo haber contribuido a la diferencia entre la ecuación (3) y la solución numérica.

Se concluye que el objetivo del proyecto se ha cumplido.

6. REFERENCIAS

[1] S. Mazumder, Numerical Methods for Partial Differential Equations: Finite Difference and Finite Volume Methods, London: Elsevier, 2016.

[2] L. M. M. D. F. Moukalled, The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics, Beirut: Springer, 2016.

[3] D. A. A. R. H. P. John C. Tannehill, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Taylor and Francis, 1997.

[4] M. P. J.H. Ferziger, Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, 2002.

[5] J. M. C. Yunus A. Cengel, Mecánica de Fluidos: Fundamentos y Aplicaciones, México DF: McGrawHill, 2018.

[6] C. A. d. S. B. Xavier Oliver Olivella, Mecánica de medios continuos para ingenieros, Catalunya: Edicions UPC, 200.

[7] J. G. E. Alinovi, «FLUBIO—An unstructured, parallel, finite-volume based Navier–Stokes,» *SoftwareX*, vol. 13, nº 100655, p. 7, 2020.

[8] F. M. White, Fluid Mechanics, Rhode Island: McGrawHill, 1998.