

## REGULACIÓN DE ROBOTS MANIPULADORES

Luna-Zempoalteca Viridiana<sup>1</sup>, Reyes-Cortés J. Fernando<sup>1</sup>, Reyes-Báez Rodolfo<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización. 18 Sur y Av. San Claudio Col. San Manuel. Tel: 2222295500 ext. 7410

<sup>2</sup> University of Groningen, Faculty of Science and Engineering, Nijenborgh 4, Groningen, The Netherlands, Tel: +31 503633790

[viridiana.luna310395@gmail.com](mailto:viridiana.luna310395@gmail.com)

### RESUMEN.

En este trabajo se desarrolla un nuevo algoritmo de control tipo exponencial (capacitivo) con funciones hiperbólicas, para el control de posición (setpoint control) de robots manipuladores de  $n$  grados de libertad (gdl). Se aplica la función estricta de Lyapunov, para demostrar la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Se comienza con la demostración de la existencia y unicidad del punto de equilibrio, para posteriormente proponer la función estricta de Lyapunov, la cual, debe satisfacer ser definida positiva. Finalmente, al emplear el Teorema de Rayleigh-Ritz se definen las cotas suficientes y necesarias que demuestran la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio. Se implementa el algoritmo propuesto para el caso del robot manipulador de 2 grados de libertad (gdl) y se compara con el control PD.

**Palabras Clave:** algoritmo de control, robot manipulador, función estricta de Lyapunov.

### ABSTRACT.

In this work, a new exponential (capacitive) control algorithm with hyperbolic functions is developed for a robot with  $n$  degrees of freedom (dof). The strict Lyapunov function is implemented to demonstrate the global asymptotic stability of the equilibrium point of the closed-loop equation. We begin with the demonstration of the existence and uniqueness of the equilibrium point, to later propose the Lyapunov's strict function, which must satisfy to be positive definite. Finally, by employing the Rayleigh-Ritz Theorem, the sufficient and necessary bounds that demonstrate the global asymptotic stability of the equilibrium point are defined. The proposed algorithm is implemented for the case of the manipulator robot with 2 degrees of freedom (dof) and compared with the PD type control.

**Keywords:** control algorithm, manipulator robot, Lyapunov's strict function.

### 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente los robots manipuladores permiten acelerar, mejorar y reducir costos de producción en diversas áreas, como, la automotriz, farmacéutica, de alimentos, etc., donde se requieren procesos de soldadura, pintado, extracción, empaquetado, etc. Esto es posible implementando algoritmos de control de alto desempeño que solucionan el problema de control de posición de robots manipuladores, el cual consiste en colocar el extremo del robot manipulador en una posición deseada  $q_d$  [1].

Matemáticamente, el problema se describe como diseñar un regulador  $\tau$  tal que la velocidad de movimiento  $\dot{q}(t)$  y el error de posición  $\tilde{q}(t)$  convergen asintóticamente a cero (al punto de equilibrio)  $\forall t \geq 0$ , sin importar las condiciones iniciales  $\dot{q}(0)$  y  $\tilde{q}(0)$  [2]. De manera que, se pueden proponer nuevos tipos de algoritmos de control a partir de los diferentes tipos de control fundamentales que existen, por mencionar: control proporcional derivativo (PD), familia de controladores exponencial tipo (PD), control seno hiperbólico, familia de controladores hiperbólicos, control tipo capacitivo, etc [3, 4].

La técnica de moldeo de energía permite diseñar una familia extensa de esquemas de control, debido a que el problema de la posición de robots manipuladores sigue siendo un área extensa de investigación con problemas cada vez más desafiantes. Se ha convertido en una actividad científica permanente y sistemática para diseñar nuevos esquemas de control de alto rendimiento con varias aplicaciones potenciales [5].

El control lineal proporcional-derivativo (PD) es el más simple para lograr la regulación de robots manipuladores. Este tipo de control garantiza el objetivo de regulación global [6]. Sin embargo, éste control mantiene un error no nulo en estado estacionario.

Por lo tanto, las principales contribuciones de este trabajo son, demostrar formalmente la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio para el sistema en lazo cerrado, empleando la función estricta de Lyapunov evitando utilizar el Teorema de Krasovskii-LaSalle. Por consiguiente, se realiza la comparación entre el control PD y el control propuesto, en simulación y de manera práctica para el robot manipulador de 2 gdl. La sintonización de las ganancias es obtenida a partir de conocer las características de par necesarias que permitan al robot manipulador funcionar lejos de los límites de saturación del servomotor [7].

### 2. MODELO DINÁMICO

Considere el modelo dinámico del robot manipulador de  $n$  gdl con compensación de gravedad. Formado con eslabones rígidos, conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + f_f(q, \dot{q}) + g(q)$$

donde:

- $q \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares.
- $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de aceleraciones articulares.
- $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva.
- $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis.
- $g(q) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial.
- $f_f(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares de fricción que incluye la fricción viscosa, de Coulomb y estática ( $f_c$ ) de cada articulación del robot.

### 3. MOLDEO DE ENERGÍA.

La técnica de moldeo de energía permite diseñar una familia extensa de esquemas de control [2]:

$$\tau = \nabla U_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q)$$

donde:

- $U_a(K_p, \tilde{q}) > 0$  es la energía potencial artificial; el término  $\nabla U_a(K_p, \tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} U_a(K_p, \tilde{q})$  representa el esquema de control y físicamente es el moldeo de la energía  $U_a(K_p, \tilde{q})$  a través del gradiente  $\nabla U_a(K_p, \tilde{q})$ , el cual debe existir como función continua en  $\tilde{q}$ ;  $\nabla U_a(K_p, \tilde{q}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 0$ ; además, se debe satisfacer  $\tilde{q}^T \nabla U_a(K_p, \tilde{q}) > 0$ .
- $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva conocida como ganancia proporcional ( $K_p > 0, K_p = K_p^T$ ).
- $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva conocida como ganancia proporcional ( $K_v > 0, K_v = K_v^T$ ).
- $\tilde{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de errores de posición definido como la diferencia entre la posición deseada  $q_d$  y la posición actual  $q(t)$ , es decir:  $\tilde{q} = q_d - q(t)$ .
- $g(q) \in \mathbb{R}^n$  es la compensación del par gravitacional.
- El término de acción de control derivativa  $f_v(K_v, \dot{q})$  realiza la función de amortiguador o freno mecánico y además satisface:  $\dot{q}^T f_v(K_v, \dot{q}) > 0$ .
- Como caso particular del control proporcional derivativo PD:  $\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q)$ , la energía potencial artificial  $U_a(K_p, \tilde{q})$  tiene la siguiente forma:  $U_a(K_p, \tilde{q}) = \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \Rightarrow \nabla U_a(K_p, \tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}} U_a(K_p, \tilde{q}) = K_p \tilde{q}$ ; el freno mecánico y amortiguador  $f_v(K_v, \dot{q}) = K_v \dot{q}$ .

### 3.1. Lazo cerrado de control.

(1)

La ecuación de lazo cerrado que describe el problema de control de posición se encuentra combinando el modelo dinámico del robot manipulador de  $n$  grados de libertad y la estructura matemática del esquema de control por moldeo de energía, cuya representación general en variables de estados  $(\tilde{q}, \dot{q})^T$  está dada por [8]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M^{-1}(q)(\nabla U_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) - C(q, \dot{q}) - B\dot{q}) \end{bmatrix}$$

### 4. ALGORITMO DE CONTROL PROPUESTO

Considérese el siguiente algoritmo de control propuesto:

$$\tau = K_p(I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{q})}) \text{senh}(\tilde{q}) - K_v(I - \beta e^{-\beta \cosh(\dot{q})}) \text{senh}(\dot{q}) + g(q)$$

donde:

- $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,
- $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,
- $I$  es la matriz identidad,
- $\alpha$  y  $\beta$  son constantes definidas por el diseñador,
- $(I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{q})}) \text{senh}(\tilde{q})$  es la función de control exponencial
- y la función  $(I - \beta e^{-\beta \cosh(\dot{q})}) \text{senh}(\dot{q})$  es la inyección de amortiguamiento.

Las funciones se encuentran definidas respectivamente como:

$$(I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{q})}) \text{senh}(\tilde{q}) = \begin{bmatrix} 1 - \left[ \begin{array}{ccc} \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{q}_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{q}_n)} \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{senh}(\tilde{q}_1) \\ \text{senh}(\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \text{senh}(\tilde{q}_n) \end{bmatrix}$$

$$(I - \beta e^{-\beta \cosh(\dot{q})}) \text{senh}(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 1 - \left[ \begin{array}{ccc} \beta e^{-\beta \cosh(\dot{q}_1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta e^{-\beta \cosh(\dot{q}_n)} \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{senh}(\dot{q}_1) \\ \text{senh}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{senh}(\dot{q}_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### 4.1. Lazo cerrado de control

La ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot de  $n$  grados de libertad ecuación (1) y el control exponencial de la ecuación (4) puede ser expresada en términos de variables de estado  $[\tilde{q}^T \dot{q}^T]^T$  de la siguiente forma:

$$\tau = M(q)\dot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f_f(\dot{q}, \dot{q}) = K_p(I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{q})}) \text{senh}(\tilde{q}) - K_v(I - \beta e^{-\beta \cosh(\dot{q})}) \text{senh}(\dot{q}) + g(q) \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M^{-1}(\mathbf{q})(K_p(I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})}) \text{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) \dots \\ -K_v(I - \beta e^{-\beta \cosh(\dot{\tilde{\mathbf{q}})}) \text{senh}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - B\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \end{bmatrix}$$

donde el par gravitacional  $g(\mathbf{q})$  se elimina, resultando una ecuación de primer orden autónoma.

#### 4.2. Análisis del punto de equilibrio

Para llevar a cabo el análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio  $[\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \mathbf{0}^T]^T$  se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

- La primera componente de la ecuación en lazo cerrado  $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -I\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \Rightarrow q(t) = \text{cte.}$  deseada, ya que la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva.
- Para la segunda componente de la ecuación (8) la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es una matriz definida positiva, y su matriz inversa existe  $M(\mathbf{q})^{-1}$  y es definida positiva.
- Por diseño la ganancia proporcional  $K_p$  es una matriz diagonal definida positiva y la ganancia derivativa  $K_v$  es una matriz definida positiva.
- Debido a que la primera componente de la ecuación en lazo cerrado  $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .
- Puesto que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , entonces la función disipativa  $f_v(K_v, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = K_v(I - \beta e^{-\beta \cosh(\dot{\tilde{\mathbf{q}})}) \text{senh}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$  ya que  $\text{senh}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \text{senh}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .
- Finalmente para:  $\nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = K_p(I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})}) \text{senh}(\tilde{\mathbf{q}})$  se tiene que:  $0 < 1 - \alpha_i e^{-\alpha_i \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} < 1$  es definida positiva ya que se considera  $0 < \alpha < 1$ , por lo tanto  $1 - \alpha < 1$ .

#### 5. FUNCIÓN ESTRICTA DE LYAPUNOV

Considérese la siguiente función estricta de Lyapunov [2, 9]:

$$V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \epsilon_0 \frac{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|}$$

donde

• El primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética, la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva.

• El segundo término  $\mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$  es la energía potencial artificial la cual es una función cuadrática del error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$  y por diseño la ganancia proporcional  $K_p$  es una matriz definida positiva. Solo queda demostrar que  $\lambda^{\max} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 > \mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) > \lambda_{\min} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2$

Por moldeo de energía se tiene:

$\nabla U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} U_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ , la función estricta de Lyapunov es:

$$V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T K_p \dots \times \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T \dots \times M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (8)$$

Para demostrar que la función  $V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}})$  es definida positiva se reacomoda la estructura de la función y dado que ésta posee una forma cuadrática, se tiene [10]:

$$(a - b)^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 - b^2$$

donde:

$$a^2 = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$-2ab = -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \dots$$

×

$$\left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$b^2 =$$

$$\left( \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right)^2 \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T \dots \times M(\mathbf{q}) \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]$$

Sustituyendo y factorizando las ecuaciones anteriores en la función estricta de Lyapunov se obtiene:

$$V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T \dots \times M(\mathbf{q}) \left[ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \frac{\epsilon_0}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)} \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \dots \times \left[ K_p - \frac{\epsilon_0^2}{(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} M(\mathbf{q}) \right] \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \quad (12)$$

La ecuación (12) representa la forma completa de la función estricta de Lyapunov, el primer término es una función definida positiva debido a que en la energía cinética la matriz de inercia  $M(\mathbf{q})$  es definida positiva y  $\epsilon_0 > 0$ . El segundo término es la energía potencial artificial, también es una función definida positiva con respecto al vector de error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$ , puesto que  $K_p > 0$ . Se sabe que  $\cosh(0) = 1$ . Por lo que la función (10) evaluada en  $V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = V(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , lo cual queda demostrado a continuación:

$$V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = 0, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0; M(\mathbf{q}) > 0; K_p > 0$$

$$V(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$$

### 5.1. Derivada temporal de la función estricta de Lyapunov

Ahora se procede a obtener la derivada temporal de la función estricta de Lyapunov, a lo largo de las trayectorias de la ecuación de lazo cerrado (8). Sustituyendo el vector de aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}$  de la ecuación de lazo cerrado, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = & -\dot{\mathbf{q}}^T K_v (I - \beta e^{-\beta \cosh(\tilde{\mathbf{q}})}) \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \\ & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T K_p \dots \\ & \times (I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})}) \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) + \\ & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T K_v \dots \\ & \times (I - \beta e^{-\beta \cosh(\tilde{\mathbf{q}})}) \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}}) - \\ & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \\ & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T B \dot{\mathbf{q}} + \\ & \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \frac{I - \alpha e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} \operatorname{senh}(\tilde{\mathbf{q}})}{\sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}}} \right]^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \dots \\ & + \frac{\epsilon_0}{\|\tilde{\mathbf{q}}\|(1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|)^2} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T \dots \\ & \times \dot{\mathbf{q}} \left[ \sqrt{\cosh(\tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\tilde{\mathbf{q}})} - 1 - e^{-\alpha}} \right]^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

A partir del Teorema de Rayleigh-Ritz, se obtienen todos los límites superiores de los términos de la ecuación (15).

- Para el caso de la matriz inercial de un robot manipulador se sabe que  $\|M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \|\ddot{\mathbf{q}}\| \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ; donde existe una constante  $\beta > 0$  tal que  $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq \beta \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$
- Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante  $k_c$ , tal que:  $\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})z\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\| \|z\|$ .
- La fricción viscosa satisface que  $\|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|B\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{max} \|\dot{\mathbf{q}}\|$ .

Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leq & - \left[ \lambda_{K_v}^{min} \sqrt{n} + \lambda_B^{min} + \epsilon_0 k_c - \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} - \frac{\epsilon_0 B}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ & - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \left[ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \lambda_{K_v}^{max} \sqrt{n} + \lambda_B^{max} \right] \right] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{aligned} \quad (16)$$

Expresando la desigualdad respecto a los estados y una matriz  $Q$  se tiene:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0$$

donde:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{min} \sqrt{n} \\ q_{22} &= \left[ \lambda_{K_v}^{min} \sqrt{n} + \lambda_B^{min} + \epsilon_0 k_c - \epsilon_0 \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} - \frac{\epsilon_0 B}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \\ q_{12} = q_{21} &= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \lambda_{K_v}^{max} \sqrt{n} + \lambda_B^{max} \right] \end{aligned}$$

Finalmente se tiene:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n} \forall t \geq 0$$

Por lo tanto, queda demostrado que existe un número  $\epsilon_0$  positivo que cumple con la desigualdad, dado que  $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$  y  $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) < 0$ .

De tal modo, se demuestra estabilidad asintótica global del punto de equilibrio  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ .

### 6. SIMULACIÓN DEL ROBOT DE 2GDL

Se aplica el algoritmo de control propuesto de la ecuación (4) para el robot manipulador de 2gdl. Los parámetros de simulación del robot manipulador de 2gdl se muestran en la tabla 1.

Tabla 1: Parámetros de simulación del robot de 2gdl.

Eslabón	Significado	Notación	(15) Valor
	Masa del eslabón 1	$m_1$	23.902 Kg
	Longitud del eslabón 1	$l_1$	0.45 m
1	Inercia del eslabón 1	$I_1$	1.266 Nmseg <sup>2</sup> /rad
(hombro)	Centro de masa del eslabón 1	$l_{c1}$	0.091 m
	Coef. de fricción viscosa	$b_1$	2.288 Nmseg/rad
	Masa del eslabón 2	$m_2$	3.88 Kg
	Longitud del eslabón 2	$l_2$	0.45 m
2	Inercia del eslabón 2	$I_2$	0.093 Nmseg <sup>2</sup> /rad
(codo)	Centro de masa del eslabón 2	$l_{c2}$	0.048 m
	Coef. de fricción viscosa 2	$b_2$	0.175 Nmseg/rad
	Aceleración debida a la gravedad	g	9.81 m/seg <sup>2</sup>

La sintonía de la ganancia proporcional se ha establecido a partir de los pares máximos establecidos por  $\tau_{1max} = 150\text{Nm}$  y  $\tau_{2max} = 15\text{Nm}$ . Y de conocer el error máximo de posición, el cual ocurre cuando  $t = 0$ , como se muestra en la ecuación (22). Para la sintonía de la ganancia derivativa, se considera el 70% de la ganancia proporcional (ecuación (23)), evitando oscilaciones de amortiguamiento [2, 11].

$$\begin{aligned} K_p &\leq 0.8 \frac{\tau_{max}}{\tilde{q}(0)} \\ K_v &\leq 0.7 K_p \end{aligned} \quad (17)$$

En la figura 1, se comparan las gráficas de posición articular del PD respecto con el control propuesto. Se observa una trayectoria similar, sin embargo, el PD tarda en llegar a la posición articular deseada aproximadamente 1.8 segundos más en comparación con el control propuesto, siendo así, que para el caso de  $q_1$  se tiene un tiempo aproximado de 4.453 segundos en llegar a la posición deseada y para  $q_2$  se tiene un tiempo aproximado de 5.053 segundos en llegar a la posición deseada.

**Posicion articular en ° del control PD VS control Capacitivo-hiperbólico**

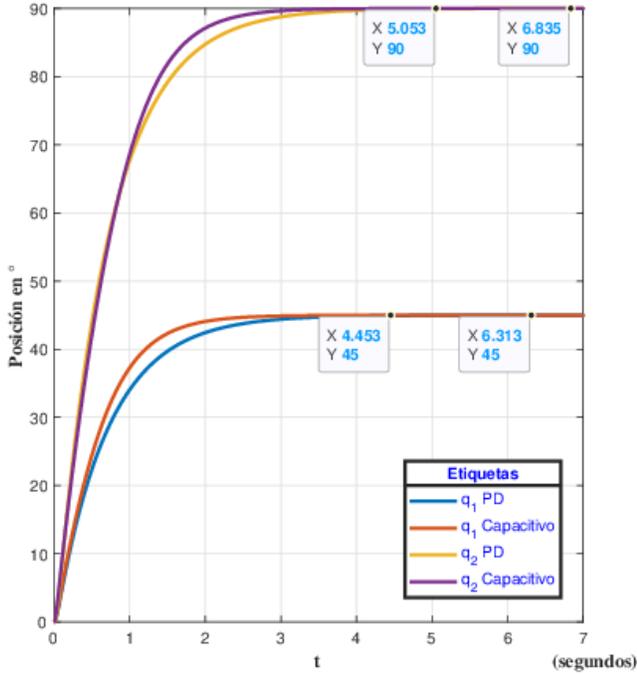


Figura 1.- Comparativa entre las posiciones articulares del control PD y control Capacitivo-hiperbólico, donde los tiempos en segundos 6.313 y 6.835 corresponden a  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente del control PD; y 4.453 y 5.053 corresponden a  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente del control Capacitivo-hiperbólico.

En la figura 2, se observa la evolución en el tiempo de los pares aplicados para cada tipo de controlador, para la simulación se ha considerado  $\tau_{1max} = 150\text{Nm}$  y  $\tau_{2max} = 15\text{Nm}$ . En efecto, los picos de par aplicado para ambos tipos de controladores se encuentran dentro de los límites máximo, como es el caso de  $\tau_1 = 120\text{Nm}$  para el PD y  $\tau_1 = 121.1\text{Nm}$  para el Capacitivo-hiperbólico, mientras que  $\tau_2 = 12\text{Nm}$  para el PD y  $\tau_2 = 15\text{Nm}$  para el Capacitivo-hiperbólico.

**Par del control PD VS control Capacitivo-hiperbólico**

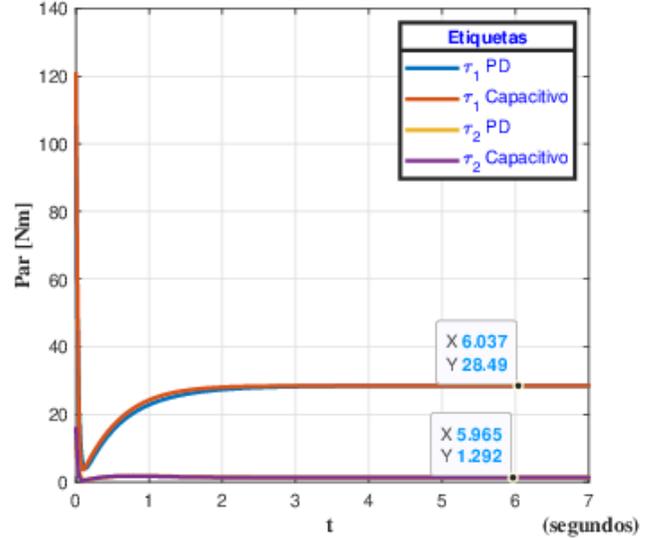


Figura 2.- Comparativa de Par aplicado, para el control PD y para el control capacitivo-hiperbólico, en el robot manipulador de 2gdl.

El par aplicado en estado estacionario es de  $\tau_1 = 28.49\text{Nm}$  y  $\tau_2 = 1.292\text{Nm}$ . La evolución del error de posición se muestra en la figura 3, de forma que para el tiempo  $t = 0$  el error es de  $45^\circ$  y  $90^\circ$  para el hombro y codo respectivamente, dado que, se tiene  $\tilde{q}_1(0) = q_{d1} - q(0) = 45^\circ - 0^\circ$  y  $\tilde{q}_2(0) = q_{d2} - q(0) = 90^\circ - 0^\circ$ .

**Error de posición**

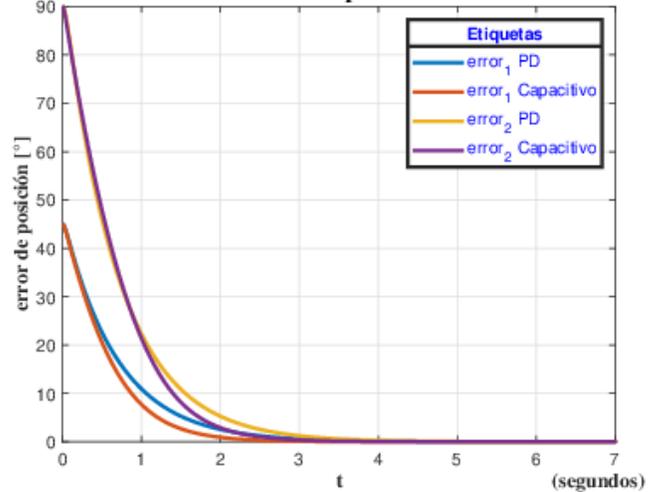


Figura 3.- Comparativa del error de posición en grados [°] entre el control PD y Capacitivo-hiperbólico.

El error en estado estacionario para el caso del PD en grados [°] es:

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} 1.8385 \times 10^{-3} \\ 3.9331 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

y para el control Capacitivo-hiperbólico:

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} 2.1234 \times 10^{-5} \\ 8.385 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

### 6.1. Norma L2

Una herramienta que se emplea para conocer el desempeño de algoritmos de control, es la variante de la norma  $\mathcal{L}_2[f]$ , mejor conocida como  $rms[f]$ , representada en la ecuación (26) [2]:

$$rms[f] = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \|f(\varphi)\|^2 d\varphi} < \infty$$

Para este caso particular,  $[f]$  es sustituida por  $[\tilde{q}]$  el error de posición en coordenadas articulares.

En la tabla 2 se muestran los desempeños obtenidos para cada caso:

Tabla 2: Comparativa de desempeño respecto al error de posición para el control PD y Capacitivo-hiperbólico

Índice de desempeño	Controlador
0.40909	PD
0.4053	Capacitivo-hiperbólico

## 7. CONCLUSIONES

Queda demostrado que el control Capacitivo-hiperbólico cumple con las condiciones matemáticas necesarias para determinar que el punto de equilibrio tiene estabilidad asintótica global, lo cual ha permitido en primera instancia desarrollar la simulación para el robot manipulador de 2gdl. Evidenciando de manera gráfica, que el control Capacitivo-hiperbólico es más rápido en llegar a la posición articular deseada en comparación con el control PD, por 1.8 segundos de diferencia, los cuales en la práctica pueden implicar mayor producción y por ende mayor generación de ingresos en una fábrica. Mientras que para el desempeño, se tiene similitud con

respecto al control PD, existiendo una diferencia de 3.79 centésimas, las cuales pueden marcar la diferencia para procesos de producción con altos estándares de precisión. Finalmente se concluye que el control Capacitivo-hiperbólico presenta mayores ventajas a diferencia del control PD, puesto que, se tienen dos parámetros de regulación que marcan la diferencia en este tipo de control:  $\alpha$  y  $\beta$ .

## REFERENCIAS

- [1] B. Siciliano and O. Khatib, Robotics and the handbook. Springer International Publishing, 2016, pp. 1–(26)
- [2] F. Reyes, Robótica. Control de robots manipuladores. México: Alfaomega Grupo Editor S. A. de C. V., 2011.
- [3] J. Fernando Reyes-Cortes, O. Felix, and G. Alonso-Aruffo, “A family of hyperbolic-type control schemes for robot manipulators,” *Kybernetika*, vol. 55, no. 3, pp. 561–585, 2019.
- [4] R. F., “A family of hyperbolic-type explicit force regulators with active velocity damping for robot manipulators,” *J Robot*, vol. 2018, no. 1, 2018.
- [5] B. A.-H. B. Sanchez García, F. Reyes Cortés and O. Felix, “Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators,” *Journal of Robotics and Control*, vol. 2, no. 6, pp. 571–581, 2021.
- [6] A. S. Takegaki M., “A new feedback method for dynamic control of manipulators,” *ASME J. Dyn. Sys. Meas. Control*, vol. 103, pp. 119–125, 1981.
- [7] F. Reyes-Cortés and B. M. Al-Hadithi, “An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability,” *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.
- [8] V. S. Rafael Kelly and A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, 1st ed. Springer, May 2005.
- [9] V. Santibañez and R. Kelly, “Strict lyapunov functions for global regulation of robot manipulators,” in *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, 1995, pp. 2758–2763 vol.3.
- [10] S. Lipschutz, *Algebra lineal*, 2nd ed. McGraw-Hill, 1992.
- [11] H. Li, Y. Chen, J. Zhang, and X. Wen, “A tuning algorithm of pd-type iterative learning control,” in *2010 Chinese Control and Decision Conference*, 2010, pp. 1–6.