

CONTROL TIPO HIPERBÓLICO CON ESTABILIDAD ASINTÓTICA PARA ROBOTS MANIPULADORES

Emanuel Ortiz-Ortiz^a, Juan Carlos Sernaque-Julca^a, Fernando Reyes-Cortés^a,
Pablo Sánchez-Sánchez^a, Jorge Fierro-Roja^a, Basil M. Al-Hadithi^b.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla^a, Universidad Politécnica de Madrid^b.

Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización Facultad de Ciencias de la Electrónica^a,

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Física Aplicada,

Escuela Superior de Ingeniería y Diseño Industrial^b,

Prolongación 24 Sur, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, Pue, México.

Tel. (222)2295500 ext 7410.

e-mail: juan.sernaque@alumno.buap.mx

RESUMEN.

En el siguiente trabajo se presenta un esquema control tipo hiperbólico con el análisis de estabilidad asintótica para robots manipuladores. El esquema de control propuesto está compuesto por funciones hiperbólicas, como el \sinh , \cosh y \tanh . Para el análisis de estabilidad, primero se estableció la ecuación de lazo cerrado que se encuentra combinando el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del esquema de control por moldeo de energía. Luego se demuestra la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Finalmente se demuestra la estabilidad asintótica a través de la propuesta de una función estricta de Lyapunov.

Palabras Clave: Robot Manipulador, Estabilidad de Lyapunov, Esquema de Control.

ABSTRACT.

In the present work, a hyperbolic type control scheme is presented with the asymptotic stability analysis for robot manipulator. The proposed control scheme is composed of hyperbolic functions, such as \sinh , \cosh and \tanh . For the stability analysis, the closed-loop equation was first established, which is found by combining the dynamic model of the robot manipulator and the mathematical structure of the energy molding control scheme. Then the existence and uniqueness of the equilibrium point of the closed-loop equation is demonstrated. Finally, the asymptotic stability is demonstrated through the proposal of a strict Lyapunov function.

Keywords: Robot Manipulator, Lyapunov Stability, Control Scheme.

1. INTRODUCCIÓN

Para que el robot manipulador de n grados de libertad realice una tarea específica, es necesario resolver el problema de la regulación en el espacio articular. Este problema de regulación o control de posición de robots manipuladores consiste en colocar el extremo final del robot en una posición deseada \mathbf{q}_d (constante en el tiempo) para cualquier condición inicial $[\mathbf{q}(0) \ \dot{\mathbf{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$. Matemáticamente el problema se describe como diseñar un controlador $\boldsymbol{\tau}$ tal que la velocidad de movimiento $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ convergen

asintóticamente a cero (al punto de equilibrio) $\forall t \geq 0$, sin importar las condiciones iniciales $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{0})$ y $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{0})$, [1].

No obstante, los servomotores del robot manipulador no tienen una fuente ilimitada de torque generando una mecánica no modelada en el manipulador del robot. Esta problemática es tratada proponiendo controladores saturados [2].

Los esquemas de control se han modificado de forma que evitan esta problemática desde diferentes perspectivas. Una forma de tratar esta problemática ha sido usar funciones hiperbólicas, como en [3] donde se presenta una familia de controladores tipo hiperbólico y en [4] se utiliza un regulador tipo arcoseno hiperbólico. En ambas investigaciones se analiza la estabilidad asintótica global.

En [5], se propone un esquema de control difuso con pares acotados y se demuestra estabilidad asintótica global a través de la teoría de Lyapunov con una evaluación experimental. Otros trabajos que también proponen esquemas de control, han realizado un análisis de estabilidad de Lyapunov [6], [7], pero en otras ocasiones este análisis no es considerado [8], [9], [10].

La demostración asintótica global del punto de equilibrio de lazo cerrado, que se forma por la dinámica del robot y el esquema de control tipo hiperbólico propuesto, a través de una función estricta de Lyapunov, es una contribución importante de este trabajo. Se propone una función estricta de Lyapunov que satisface ser una función definida positiva y su derivada, una función definida negativa.

2. MODELO DINÁMICO DEL ROBOT

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta, consideración la fricción viscosa, se puede escribir como [1], [11].

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + B\dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de velocidades articulares, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de aceleraciones articulares; $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal definida positiva para el par de fricción viscoso y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares aplicados.

El modelo dinámico del robot manipulador presenta las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante positiva $\beta_M > 0$ tal que, $\|M(\mathbf{q})\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq \beta_M, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; donde $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}$ representa el valor propio máximo de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.

Propiedad 2: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$, tal que: $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| = k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Propiedad 3: La fricción viscosa satisface lo siguiente: $\lambda_B^{min} \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{max} \|\dot{\mathbf{q}}\|$; donde λ_B^{max} y λ_B^{min} son el valor propio máximo y mínimo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa B , respectivamente.

Propiedad 4: La derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisfacen: $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Propiedad 5: La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia $\dot{M}(\mathbf{q})$ satisfacen: $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0, \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Es decir, la matriz resultante $[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$ es una matriz antisimétrica.

3. ESQUEMA DE CONTROL TIPO HIPERBÓLICO.

Se presenta el siguiente esquema de control tipo hiperbólico, que depende del error de posición y de la velocidad de movimiento del robot manipulador. Se agregó una compensación por gravedad, lo cual representa una gran ventaja para el análisis de estabilidad de Lyapunov y el rendimiento en los robots manipuladores:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m})} - K_v \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m})} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2)$$

donde $m \in \mathbb{N}$, es un número entero positivo, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, son números positivos, $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es el vector de posición de error, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es el vector de velocidad y $K_v, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son matrices diagonales definidas positivas. \\\

Los términos del esquema de control serán representados de la siguiente forma:

$$\delta = \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m})} \quad (3)$$

$$\omega = \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}})^{2m})} \quad (4)$$

donde:

$$\delta = \begin{bmatrix} \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)^{2m})} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1)^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1)}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1)^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_n)^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_n)}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_n)^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_n)^{2m})} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Las ecuaciones (3) y (4), satisfacen la siguiente relación:

$$\delta \leq \begin{cases} \sqrt{n} \gamma_1, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} \gamma_1 \|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (7)$$

$$\omega \leq \begin{cases} \sqrt{n} \gamma_2, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} \gamma_2 \|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (8)$$

donde el número γ_1 y γ_2 , representan el límite superior (este es el valor máximo que depende del valor de m).

En la figura 1, se muestra la respuesta que tiene el control a diferentes valores de α . Asimismo, se le asigna el valor de 1 a la variable m . Este será el valor de m que se utilizará al momento de obtener los resultados.

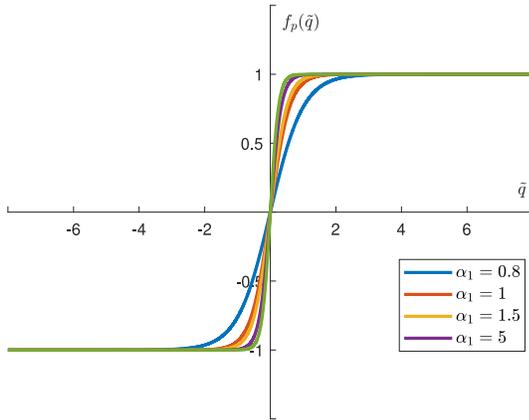


Figura 1: Respuesta del esquema de control a diferentes valores de α .

4. ECUACIÓN DE LAZO CERRADO ENTRE EL MODELO DINÁMICO Y EL ESQUEMA DE CONTROL

Se establece la ecuación de lazo cerrado entre el modelo dinámico y el esquema de control, igualando las ecuaciones (1) y (2). Se expresa el resultado como variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \delta - K_v \omega - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{q}} - B \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se tiene la siguiente consideración para las variables de estado $\tilde{q} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$. Para demostrar la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ de la ecuación en lazo cerrado (9), se toman las siguientes consideraciones:

- La primera componente de la ecuación en lazo cerrado, $-\dot{\tilde{q}} = -I \dot{\tilde{q}} \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, ya que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva. Si $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}(t) = \text{constante}$.
- La segunda componente, es la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$, la cual es definida positiva y su matriz inversa existe $M(\mathbf{q})^{-1}$ y también es definida positiva.
- La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- En el caso de la fricción viscosa, se cumple que $B \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, si $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- Por diseño, la ganancia proporcional K_p y derivativa K_v son matrices definidas positivas.
- La función propuesta (δ y ω) de hipérbolas, se hace cero cuando $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$ o $\tilde{q} = \mathbf{0}$.

Por lo tanto, $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ el punto de equilibrio existe y es único.

5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

5.1. Función estricta de Lyapunov

Ahora se procede a proponer una función estricta de Lyapunov, de la siguiente forma [4]:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} + \mathcal{U}(K_p, \tilde{q}) - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}}}{\mathbf{1} + \|\tilde{q}\|} \quad (10)$$

A partir de la ecuación (10) se propone la siguiente función estricta de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right]^T K_f \times \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}}}{\mathbf{1} + \|\tilde{q}\|} \quad (11)$$

donde ϵ_0 es cualquier número positivo. Es importante tener en cuenta que ϵ_0 solo se requiere para fines de análisis y, por lo tanto, no es necesario conocer su valor numérico. Solo se necesita para demostrar que existe [4].

Por otro lado, la función de Lyapunov estricta es una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa. Por lo tanto, a través del método directo de Lyapunov se puede concluir la estabilidad asintótica global. La ecuación (11) puede ser reescribir de la siguiente manera:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \left[\dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{\mathbf{1} + \|\tilde{q}\|} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[\dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{\mathbf{1} + \|\tilde{q}\|} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right]^T K_f \times \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2 \tilde{q}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}}}{[\mathbf{1} + \|\tilde{q}\|]^2} \quad (12)$$

Por simplicidad el término que contiene las funciones hiperbólicas de la ecuación (12), se va expresar de la siguiente forma:

$$\varphi = \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] \quad (13)$$

donde:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\cosh(\alpha\tilde{q}_1)^3 \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_1)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha\tilde{q}_1) \sinh(\alpha\tilde{q}_1) \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{\cosh(\alpha\tilde{q}_n)^3 \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_n)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha\tilde{q}_n) \sinh(\alpha\tilde{q}_n) \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

La ecuación (3) satisface la siguiente relación:

$$\delta \leq \begin{cases} \sqrt{n}\rho, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\rho\|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (15)$$

Para el análisis de estabilidad por Lyapunov, primero se demuestra que la función estricta de Lyapunov es definida positiva. El primer término de la ecuación (12), tiene una forma cuadrática y se sabe que $M(q)$ es definida positiva, por lo tanto, este término es definido positivo. De manera similar para el segundo término, también es definido positivo debido a que K_p es una matriz diagonal definida positiva. ϵ_0 es una constante positiva tal que satisface (16); por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (12) es una función definida positiva.

$$0 < \epsilon_0 < \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{min} \rho}{\beta}} \quad (16)$$

5.2. La derivada temporal de la función estricta de Lyapunov

Ahora, se realiza la derivada temporal de la función estricta de Lyapunov propuesta, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q) \dot{q} - \delta K_p q \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{q} \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (17)$$

En la ecuación (17), reemplazamos el valor de \dot{q} y usamos las propiedades (4) y (5), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= -\dot{q}^T K_v \omega - \dot{q}^T B \dot{q} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} K_p \delta \\ &+ \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} K_v \omega + \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} B \dot{q} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{q} \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora, procedemos a obtener las cotas superiores de todos los términos de la función de Lyapunov haciendo uso de las propiedades (1), (2), (3) y de la relación de las funciones hiperbólicas (7) y (8):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &\leq -\lambda_{K_p}^{min} \rho_1 \|\dot{q}\|^2 - \lambda_B^{min} \|\dot{q}\|^2 - \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|^2}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \\ &+ \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\| \rho_2 \|\dot{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\| \lambda_B^{max} \|\dot{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ &- \epsilon_0 K_c \|\dot{q}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} \|\dot{q}\|^2 \\ &- \beta \epsilon_0 \|\dot{q}\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Después de realizar agrupaciones algebraicas y reducción de términos, la ecuación (19) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &\leq -\left[\lambda_{K_p}^{min} \rho_1 + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} + \beta \epsilon_0 \right] \|\dot{q}\|^2 \\ &+ \left[\frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{max}}{1 + \|\tilde{q}\|} \right] \|\tilde{q}\| \|\dot{q}\| \\ &- \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|^2}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \end{aligned} \quad (20)$$

Le damos forma de una estructura cuadrática a la ecuación (20):

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{q}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{q}\| \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Los elementos de la matriz Q esta definidos por:

$$q_{11} = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \quad (23)$$

$$q_{22} = \lambda_{K_p}^{min} \rho_1 + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} + \beta \epsilon_0 \quad (24)$$

$$q_{12} = q_{21} = \frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{max}}{1 + \|\tilde{q}\|} \quad (25)$$

Como la ecuación (21), es definida negativa por lo tanto se demuestra estabilidad asintótica. Con esto se logra que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \forall t \geq 0$$

6. RESULTADOS

En esta sección se describe los resultados obtenidos de la simulación del esquema de control tipo hiperbólico, implementado en un robot manipulador antropomórfico de 2 grados de libertad de transmisión directa, que se muestra en la figura 1. Esto se hace para avalar la eficacia, rendimiento y resultados teóricos del esquema de control propuesto. La simulación se llevó a cabo en el software MATLAB. Este enfoque permite evaluar los fenómenos físicos del robot manipulador, sin la necesidad de tenerlo físicamente.



Figura 2: Robot Manipulador.

La actividad que se llevó a cabo en la simulación, consiste en posicionar a las articulaciones del hombro y el codo del robot manipulador que se encuentran en posición de casa $[0 \ 0]^T$ grados, hacia una posición deseada $[45 \ 90]^T$ grados.

Los parámetros numéricos del robot de dos grados de libertad han sido obtenidos a través de identificación paramétrica, los cuales son presentados en [1].

Articulación	Modelo	Par máx	Resolución
Hombro	DM-1150	150 [Nm]	1024.0
Codo	DM-1050	15 [Nm]	1024.0

Tabla 1 Características de los servomotores

En la tabla 1, se muestran las características de los servomotores. Con estos datos se propone la siguiente regla de sintonía para K_p en ambas articulaciones:

$$K_{p1} = 150 \times 0.95 \quad (26)$$

$$K_{p2} = 15 \times 0.805 \quad (27)$$

La variable K_{p1} corresponde al primer eslabón y K_{p2} corresponde al segundo eslabón. Para las ganancias derivativas se tiene la siguiente regla de sintonía:

$$K_{v1} = 0.95 \times K_{p1} \quad (28)$$

$$K_{v2} = 1.055 \times K_{p2} \quad (29)$$

Las variables α y β , son las que permiten que la respuesta de la función hiperbólica se estabilice más rápido, fueron sintonizadas con los siguientes valores:

$$\alpha = 0.645 \quad (30)$$

$$\beta = 1.1085 \quad (31)$$

En la figura 3, se muestra el error de posición del robot manipulador de 2 grados de libertad para ambas articulaciones, respectivamente. Por medio del control tipo hiperbólico, se puede observar que los errores de posición llegan asintóticamente a cero. También se tiene en cuenta que cada posición converge asintóticamente a cero sin generar sobre impulsos en régimen transitorio y de forma suave y rápida llega al estado estacionario, en un tiempo menor a 1 segundo. En otras palabras, el esquema de control tipo hiperbólico cumple con el objetivo de llevar al robot manipulador a la posición deseada.

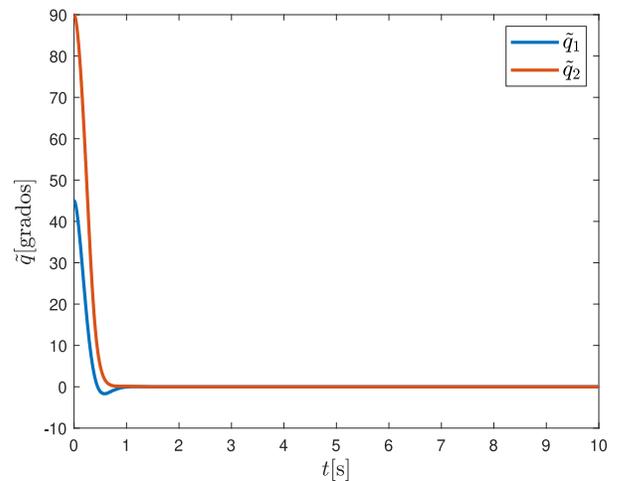


Figura 3:Error de posición.

De igual forma, en la figura 4 se muestra las velocidades de las articulaciones del robot manipulador. Se puede observar que de igual forma, el error de posición y las velocidades de movimiento llegan asintóticamente a cero.

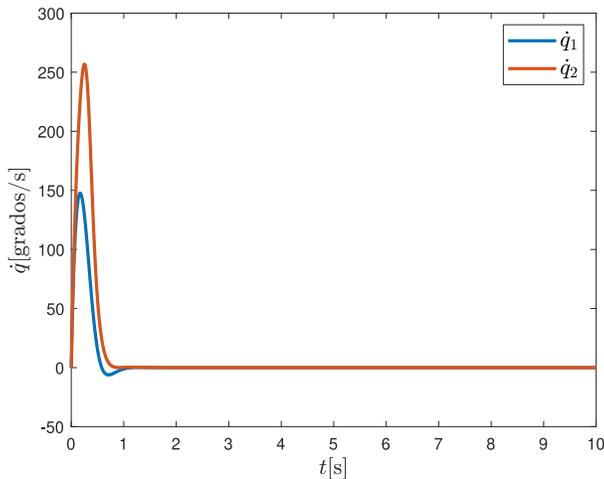


Figura 4: Velocidad del robot.

Por lo tanto, de forma cualitativa a través de la simulación se ha podido mostrar que el robot manipulador llega al punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado de forma asintótica. Con las figuras 3 y 4, se demuestra que el esquema de control propuesto tiene un buen desempeño.

En la figura 5, se puede observar que la energía que se le suministra al robot manipulador, no sobrepasa los límites físicos permitidos, los cuales se muestran en la tabla 1. Esto se debe a la correcta sintonización de las ganancias constantes y a la regla de sintonía implementada.

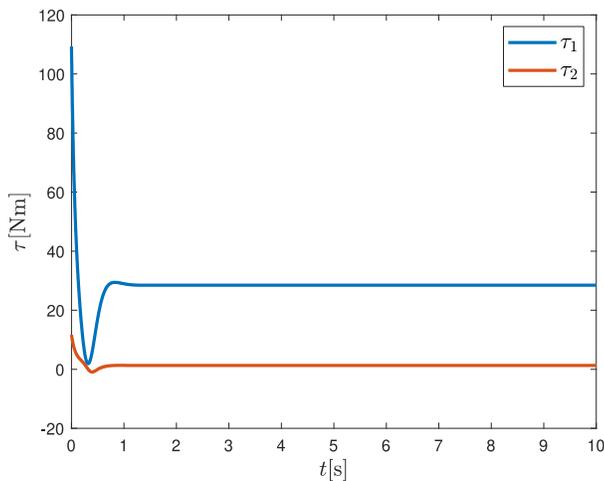


Figura 5: Pares aplicados.

7. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado un nuevo esquema de control tipo hiperbólico para resolver el problema de control de posición de los robots manipuladores en el espacio articular. Según el método directo de Lyapunov, este esquema está respaldado por un riguroso análisis de estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov. Para esto se propuso una función estricta de Lyapunov, la cual cumple con ser una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa, lo cual permite establecer condiciones que garanticen la estabilidad asintótica y global. El rendimiento del esquema de control propuesto, tiene una buena respuesta transitoria y pequeños errores de posición de estado estable. Asimismo, la simulación nos permite tener un respaldar del análisis teórico presentado.

REFERENCIAS

- [1] F. Reyes Cortés, Control de Robots Manipuladores. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2011.
- [2] B. Sanchez García, F. Reyes Cortés, B. Al-Hadithi, and O. Felix, "Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators," *Journal of Robotics and Control (JRC)*, vol. 2, no. 6, pp. 571–581, 2021.
- [3] F. Reyes-Cortes, O. Felix, J. Cid, and G. Alonso-Aruffo, "A family of hyperbolic-type control schemes for robot manipulators," *Kybernetika*, vol. 55, no. 3, pp. 561–585, 2019.
- [4] F. Reyes-Cortes and B. M. Al-Hadithi, "An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability," *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.
- [5] V. Santibáñez, R. Kelly, and M. Llama, "A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 362–372, 2005.
- [6] Y. Tianchi, L. Zhongbao, and W. Guiping, "Adaptive sliding mode control of robot based on fuzzy neural network," *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, vol. 12, pp. 1–13, 2020.
- [7] M. Jafari, G. Márquez, J. Selberg, M. Jia, H. Dechiraju, P. Pansodtee, M. Teodorescu, M. Rolandi, and M. Gomez, "Feedback control of bioelectronic devices using machine learning," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 1133–1138, October 2021.
- [8] Y. Cao and Y. D. Song, "Adaptive pid-like fault-tolerant control for robot manipulators with given performance specifications," *International Journal of Control*, vol. 93, no. 3, pp. 377–386, 2020.
- [9] Q. Zhang, G. Yin, and L. Y. Wang, "A deep filtering approach for control of partially observed systems," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 1189–1194, October 2021.
- [10] H. Tsukamoto, S.-J. Chung, and J.-J. E. Slotine, "Neural stochastic contraction metrics for learning-based control and estimation," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 5, pp. 1825–1830, November 2021.
- [11] R. Kelly, V. Davila, and A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 2005.