

DISEÑO DE UN COMPENSADOR EN ADELANTO POR MEDIO DEL CRITERIO DE ESTABILIDAD DE BODE PARA CONTROLAR EL DESPLAZAMIENTO DE UN MOTOR DE CD

Serrano Verdugo Orlando*, Lizárraga Ontiveros Mónica Rosario**

Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Los Mochis

*Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

**Departamento de Ciencias Económico Administrativas

Unidad Los Mochis, Blvd. Juan de Dios Batiz y 20 de Noviembre

Los Mochis, Sinaloa.

Tels. 668 812 5858, 668 812 5959.

e-mail: orseve@gmail.com

RESUMEN.

En este artículo se lleva a cabo un análisis del comportamiento de la respuesta del motor de cd en lazo cerrado, construyendo un compensador en adelanto por medio del criterio de estabilidad de Bode, por lo que es necesario convertir el modelo matemático a la frecuencia. El modelo matemático del motor de cd es su función de transferencia, en donde la salida es el desplazamiento angular de la flecha y la entrada es el voltaje de alimentación de la máquina. Se desea que el compensador en adelanto aporte a la planta un margen de fase mayor que 50° pero menor que 60° , por lo que es necesario aplicar ciertos pasos metodológicos para lograrlo. Primeramente, se analiza el comportamiento de la salida de la planta en lazo cerrado, con un controlador proporcional, después se hace el análisis con el compensador en adelanto diseñado y por último se compara las respuestas.

Palabras Clave: Motor de cd, Bode, compensador en adelanto, lazo cerrado, función de transferencia.

ABSTRACT.

In this article an analysis of the response behavior of the cd motor in closed loop is carried out, building a compensator in advance by means of the Bode stability criterion, so it is necessary to convert the mathematical model to the frequency. The mathematical model of the cd motor is its transfer function, where the output is the angular displacement of the arrow and the input is the machine's supply voltage. It is desired that the compensator in advance provide the plant with a phase margin greater than 50° but less than 60° , so it is necessary to apply certain methodological steps to achieve it. Firstly, the behavior of the output of the plant in closed loop is analyzed, with a proportional controller, then the analysis is made with the compensator in advance designed and finally the answers are compared.

Keywords: CD motor, Bode, compensator in advance, closed loop, transfer function.

1. INTRODUCCIÓN

El Motor de Corriente Directa, comúnmente llamado motor de cd, es ampliamente utilizado en la industria, en dispositivos de control como drones en el movimiento de las hélices, en el arranque de un carro, en aparatos electrodomésticos, en robótica, entre otros.

Por medio del motor de cd se puede controlar la velocidad de una banda o de un mecanismo basado en sistema de poleas y engranes, pero también se puede controlar la posición de la flecha de la máquina con el objetivo de obtener la posición angular de un brazo, del movimiento de una banda transportadora, un carro, etc., por lo tanto, se ha pretendido diseñar un compensador en adelanto en la frecuencia, utilizando el criterio de estabilidad de Bode, con el fin de controlar la posición angular del motor de cd. El modelo matemático empleado es la función de transferencia del motor, en donde la entrada es el voltaje de excitación $E_a(s)$ y la salida es el desplazamiento angular $\theta(s)$. Este modelo consta de tres polos reales, cuyo valor depende de los parámetros de la planta, además no tiene ceros finitos, siendo un sistema muy estable en lazo abierto, aunque en lazo cerrado, puede ser inestable, ya que los polos significativos del sistema cruzan el eje imaginario del plano S, por lo que se desea añadir un controlador que compense la dinámica del sistema y lo vuelva estable para valores de ganancia mayores.

El compensador en adelanto consta de una ganancia K_c , además aporta un polo y un cero a la planta para modificar la dinámica del sistema y mejorar la respuesta del mismo. Para llevar a cabo el diseño del compensador en adelanto primero se analiza el margen de fase que aporta al sistema la ganancia del compensador, posteriormente se calculan el polo y el cero del mismo de tal manera que el margen de fase del sistema sea el requerido para mejor comportamiento de la respuesta de la planta.

Se han desarrollado algoritmos de control para controlar la posición de la flecha del motor de cd, como por ejemplo se ha implementado un control PID sintonizando sus parámetros por medio de Ziegler-Nichols [7], por otro lado, se ha buscado desarrollar un control estimando el par del motor y aplicando un PID difuso [8]. Una de las ventajas de compensador en adelanto es que al estar conformado por una planta que aporta un polo y un cero a la dinámica del sistema, le permite rapidez en la respuesta del mismo con un sobrepico no mayor al 20%, para el caso de la planta propuesta en este trabajo.

Primeramente, en este artículo, se contempla el modelo matemático de la planta [2] y se hace un análisis del sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional, después, se realizan los cálculos para obtener los valores del compensador en adelanto [1] y se obtienen las respuestas del sistema, por último, en las conclusiones, se analiza el comportamiento del motor de cd considerando ambos controladores.

2. COMPENSADOR EN ADELANTO UTILIZANDO EL CRITERIO DE ESTABILIDAD DE BODE

2.1. Función de transferencia del motor de cd.

El modelo matemático que se considera para diseñar el compensador en adelanto es la función de transferencia para el motor de corriente directa, en donde se considera como salida el desplazamiento de la flecha de la máquina $\theta(s)$ y la entrada el voltaje de alimentación $E_a(s)$. El modelo se presenta en la ecuación 1[2]

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (K_b K_i + R_a B_m) s} \quad (1)$$

Donde $K_b = K_i = 0.01 \text{ Nm/A}$ Constantes de proporcionalidad de la máquina.

$J_m = 0.01 \text{ kg} - \text{m}^2$ Momento de inercia del motor.

$B_m = 0.1 \text{ Nms}$ Fricción del sistema mecánico.

$R_a = 1 \Omega$ Resistencia de armadura.

$L_a = 0.5 \text{ H}$ Inductancia de armadura.

Considerando los parámetros anteriores para la función de transferencia del motor de cd es

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{0.01}{0.005s^3 + 0.06s^2 + 0.1001s}$$

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{2}{s^3 + 12s^2 + 20.02s} \quad (2)$$

Factorizando la ecuación (2), la función de transferencia queda de la forma

$$\frac{\theta(s)}{E_a(s)} = \frac{2}{s(s + 2.0025)(s + 9.9975)} \quad (3)$$

Donde

$\theta(s)$ es la posición angular de la flecha del motor.

$E_a(s)$ es el voltaje de entrada del motor.

La ecuación (3) tiene 3 polos reales, el primero en cero, el segundo en -2.0025 y el tercer polo en -9.9975 .

Aplicando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se determina que este sistema retroalimentado posee una ganancia

crítica $K_{cr} = 120.12$, entonces si el sistema contará con un controlador proporcional, el sistema retroalimentado sería inestable para una ganancia mayor a 120.12.

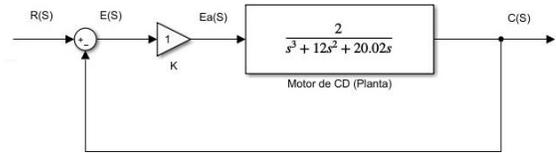


Figura 1: Motor de cd con lazo de retroalimentación

El Lugar Geométrico de las Raíces del sistema anterior es graficado MATLAB®

La figura 2 muestra el Lugar Geométrico de las raíces del sistema controlado solo por una ganancia proporcional. Los polos significativos son $S_1 = 0$ y $S_2 = -2.0025$, bajo estas condiciones se tiene que para valores entre $0 < K < 4.5232$ los polos en lazo cerrado son reales diferentes y la respuesta transitoria del sistema, a una referencia escalón, es sobreamortiguada

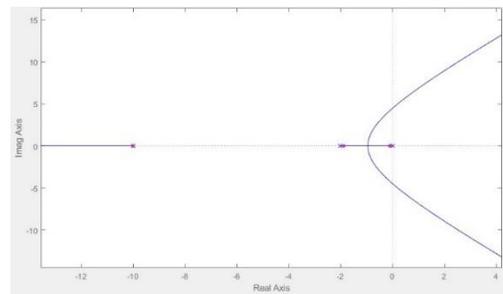


Figura 2: Gráfica del Lugar Geométrico de las Raíces

La figura 3 muestra la respuesta del motor de cd a una referencia escalón unitario con una ganancia $K = 3$. Como se aprecia la respuesta transitoria del sistema es sobreamortiguada, además el sistema alcanza el valor de la referencia en 14 segundos aproximadamente.

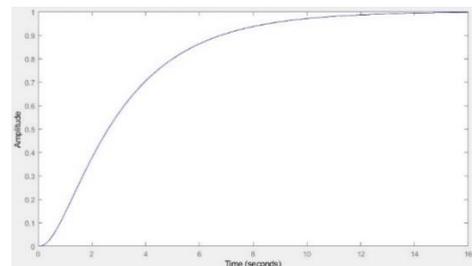


Figura 3: Respuesta del sistema a una entrada escalón unitario, con una ganancia $K = 3$.

Para valores de ganancia $4.5232 < K < 120.12$ los polos significativos en lazo cerrado son complejos conjugados y la respuesta transitoria del sistema es subamortiguada.

La figura 4 muestra la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario, como se puede apreciar para una ganancia igual a 50, la respuesta transitoria es subamortiguada.

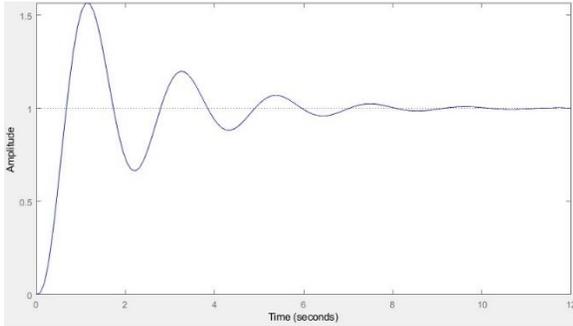


Figura 4: Respuesta del sistema a una entrada escalón unitario con $K = 50$.

2.2. Diseño del compensador en adelanto.

Para el motor de cd, se propone diseñar un compensador en adelanto por medio del criterio de estabilidad de Bode, con el fin de mejorar el rango de respuesta del sistema manteniendo un margen de fase $30^\circ \leq MF \leq 60^\circ$ [1], esto se debe a que la respuesta de la magnitud debe tener la frecuencia de cruce cuando tiene una pendiente de -20 dB/década. Cuando la frecuencia de cruce se encuentra en una pendiente de -40 dB/década el margen de fase puede ser muy pequeño o negativo (un margen de fase negativo hace inestable al sistema).

El compensador en adelanto está dado por

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha T s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (4)$$

Con

$$0 < \alpha < 1$$

En la ecuación (4) K_c representa la ganancia del compensador, α es la constante de atenuación y T es la constante de tiempo del compensador en adelanto.

Para el diseño del compensador se considera que el motor de cd tenga una constante de error estático de velocidad $K_v = 4 \text{ seg}^{-1}$. Considerando la nueva planta

$$G_1(s) = \frac{2K}{s(s + 2.0025)(s + 9.9975)} \quad (5)$$

donde

$$K = K_c \alpha \quad \text{y} \quad G_1(s) = KG(s)$$

Se determina el valor de la ganancia K como sigue

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2K}{s(s + 2.0025)(s + 9.9975)}$$

$$K = \frac{(4)(2.0025)(9.9975)}{2}$$

$$K = 40.04$$

Con esta nueva planta, a la cual se le ha agregado la ganancia K , se determina los factores en la frecuencia con $s = j\omega$.

$$G_1(j\omega) = \frac{4}{j\omega \left(j \frac{\omega}{2.0025} + 1 \right) \left(j \frac{\omega}{9.9975} + 1 \right)} \quad (6)$$

Para determinar el margen de fase, se iguala la magnitud de la planta a cero decibeles, esto es

$$\|G_1(j\omega)\| = 0 \text{ dB}$$

$$\|G_1(j\omega)\| = 20 \log_{10} \left[\frac{4}{\omega \sqrt{\frac{\omega^2}{4.01} + 1} \sqrt{\frac{\omega^2}{99.95} + 1}} \right] = 0 \text{ dB}$$

Realizando los despejes necesarios de la ecuación anterior, se obtiene que el valor de la frecuencia en la magnitud cruza los cero decibeles, con el objetivo de encontrar el margen de fase del sistema

$$\omega_c = 2.4552 \text{ rad/seg}$$

Donde ω_c es la frecuencia de cruce (en donde la magnitud de la gráfica de Bode cruza por cero decibeles)

Con el valor de esta frecuencia se determina el margen de fase

$$\angle G_1(j\omega_c) = \tan^{-1} \frac{0}{4} - \tan^{-1} \frac{2.4552}{0} - \tan^{-1} \frac{2.4552}{2.0025} - \tan^{-1} \frac{2.4552}{9.9975}$$

Por lo tanto el valor del ángulo es

$$\angle G_1(j\omega_c) = -154.5967^\circ$$

El margen de fase del nuevo de $G_1(j\omega)$ está dado por

$$M.F. = -154.5967^\circ - (-180^\circ)$$

$$M.F. = 25.4032^\circ \quad (7)$$

Lo anterior se puede apreciar al graficar con MATLAB®

La figura 5 muestra el margen de fase del sistema con el compensador K , el cual coincide con el valor determinado por medio del análisis realizado.

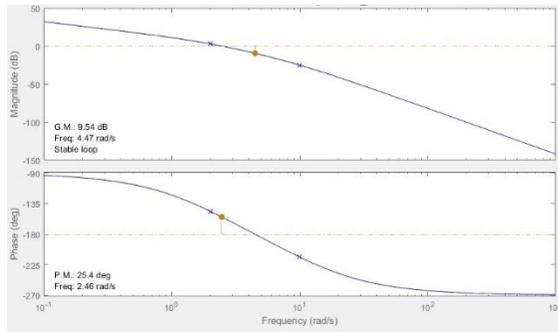


Figura 5: Diagrama de Bode de magnitud y fase

Ahora se realiza el cálculo del ángulo de fase máximo con el cual será determinado el polo y el cero del compensador

$$\phi_m = MF_{Esperado} - MF_{Obtenido} + \phi_{Adicional}$$

donde

ϕ_m es el ángulo de fase máximo que aporta el compensador.

$MF_{Esperado}$ es el margen de fase que se espera obtener.

$MF_{Obtenido}$ es el margen de fase obtenido debido a la ganancia $K = K_c \alpha$ propuesta.

$\phi_{Adicional}$ es el ángulo adicional aportado para asegurar alcanzar el margen de fase esperado.

Se propone un ángulo adicional de 22°

$$\begin{aligned} \phi_m &= 50^\circ - 25.4032^\circ + 22^\circ \\ &= \phi_m 46.59^\circ \end{aligned} \quad (8)$$

A partir de la ecuación (8) se determina la constante de atenuación α con la siguiente ecuación

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m} \quad (9)$$

Sustituyendo los valores de ϕ_m en la ecuación (9)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 - \sin 46.59^\circ}{1 + \sin 46.59^\circ} \\ \alpha &= 0.1583 \end{aligned} \quad (10)$$

La función de transferencia que contienen al cero y al polo del compensador en adelanto es

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (11)$$

Haciendo $s = j\omega$ se obtienen los factores para la ecuación (11)

$$G_c(j\omega) = \frac{j\omega + \frac{1}{T}}{j\omega + \frac{1}{\alpha T}} = \frac{\frac{1}{T}(j\omega T + 1)}{\frac{1}{\alpha T}(j\omega \alpha T + 1)} = \alpha \frac{j\omega T + 1}{j\omega \alpha T + 1}$$

Se tiene la nueva frecuencia de cruce de ganancia establecida por

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \quad (12)$$

Evaluando la magnitud de $G_c(j\omega)$ en el valor de ω_m

$$\|G_c(j\omega_m)\| = 10 \log_{10}(\alpha) \quad (13)$$

Sustituyendo el valor de la constante de atenuación en la ecuación (12)

$$\|G_c(j\omega_m)\| = 10 \log_{10}(0.1583) = -8 \text{ dB}$$

Igualando la magnitud anterior en la siguiente ecuación

$$\|G_1(j\omega)\| = 20 \log_{10} \left[\frac{4}{\omega \sqrt{4.01} + 1 \sqrt{99.95} + 1} \right] = -8 \text{ dB}$$

Realizando los despejes necesarios se obtiene el valor de la nueva frecuencia de cruce

$$\omega_m = 4.0908 \text{ rad/seg}$$

Calculando el valor de la fase para la nueva frecuencia de cruce

$$\angle G_1(j\omega_m) = \tan^{-1} \frac{0}{4} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{0} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{2.0025} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{9.9975}$$

El valor del ángulo es

$$\angle G_1(j\omega_m) = -176.1711^\circ \quad (14)$$

El ángulo de caída está dado por

$$\phi_{Caída} = \angle G_1(j\omega_c) - \angle G_1(j\omega_m)$$

$$\phi_{Caída} = -154.5967^\circ - (-176.1711^\circ) = 21.57^\circ$$

Para obtener el margen de fase requerido para el sistema ($MF_{Esperado} \geq 50^\circ$) el ángulo de caída debe ser menor o igual al ángulo adicional, esto es

$$\phi_{Adicional} \geq \phi_{Caída}$$

$$22^\circ \geq 21.57^\circ$$

Por lo tanto, el ángulo adicional seleccionado es el correcto. A partir de la ecuación 12, se obtiene el valor del polo del compensador en la ecuación (11)

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_m = \sqrt{0.1583}(4.0906)$$

$$\frac{1}{T} = 1.6276 \quad (15)$$

De la ecuación (15) se puede deducir el valor del cero del compensador en adelante

$$\frac{1}{\alpha T} = 10.2817 \quad (16)$$

Se tiene que $K = K_c \alpha$, al despejar se obtiene

$$K_c = \frac{K}{\alpha} = \frac{40.04}{0.1583}$$

$$K_c = 252.9374$$

Por lo tanto, el compensador queda de la forma

$$G_c(s) = 252.9374 \frac{s + 1.6276}{s + 10.2817}$$

El diagrama de bloques del sistema compensado queda de la siguiente manera

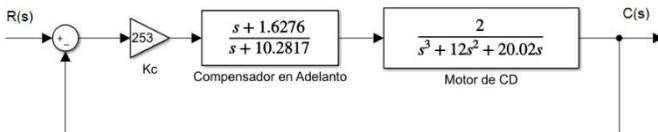


Figura 6: Diagrama de bloques del sistema compensado

A partir de los factores en la frecuencia del sistema compensado se resuelve que

$$G_{cp}(s) = 253 \left(\frac{s + 1.62}{s + 10.28} \right) \left(\frac{2}{s(s + 2.0025)(s + 9.9975)} \right)$$

$$G_{cp}(j\omega) = 3.98 \frac{j\frac{\omega}{1.62} + 1}{j\omega(j\frac{\omega}{10.28} + 1)(j\frac{\omega}{2.0025} + 1)(j\frac{\omega}{9.9975} + 1)}$$

Para calcular el margen de fase del sistema compensado y evaluando en la nueva frecuencia de cruce ω_m

$$\angle G_{cp}(j\omega_m) = \tan^{-1} \frac{0}{4} + \tan^{-1} \frac{\omega_m}{1.62} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{0} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{10.68} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{2.0025} - \tan^{-1} \frac{\omega_m}{9.9975}$$

$$\angle G_{cp}(j\omega_m) = -129.5634^\circ$$

Por lo tanto, el margen de fase es

$$MF = -129.5634^\circ - (-180^\circ)$$

$$MF = 50.43^\circ$$

El valor anterior es el margen de fase requerido para que el sistema funcione de manera óptima.

La gráfica de Bode obtenida por medio de MATLAB® corrobora el margen de fase obtenido

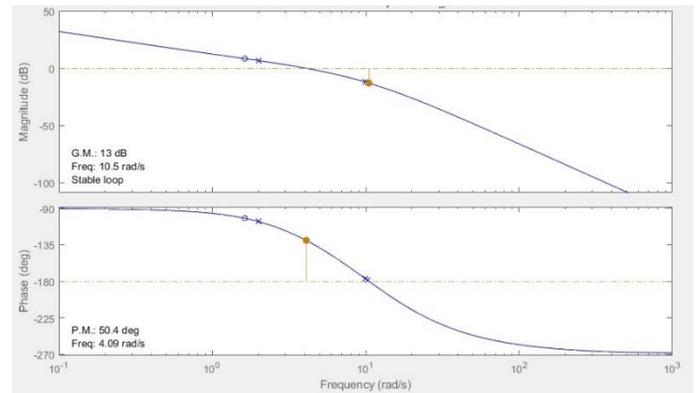


Figura 7: Diagrama de Bode del motor de cd con compensador en adelante, que muestra el margen de fase requerido.

2.3. Resultados.

Al agregar el compensador en adelante, calculado en este trabajo, al motor de cd establecido, la respuesta a una referencia escalón unitario muestra en la figura 8 el desplazamiento del motor de cd $\theta(t)$.

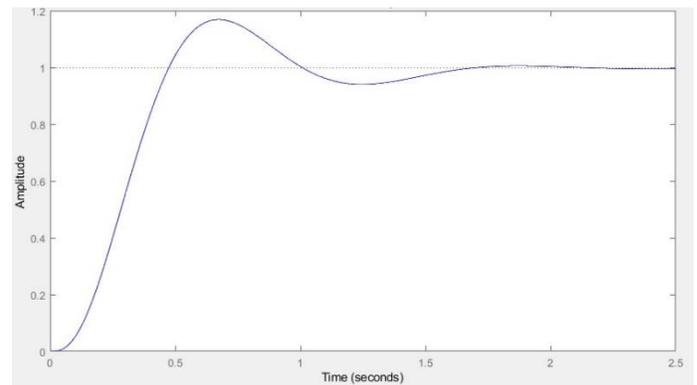


Figura 8: Respuesta del motor de cd con compensador en adelante a una entrada escalón unitario

Como se puede observar en la figura 9, la respuesta alcanza la respuesta en estado estacionario en menos de 2 segundos, alcanzando un pico máximo menor a 1.2.

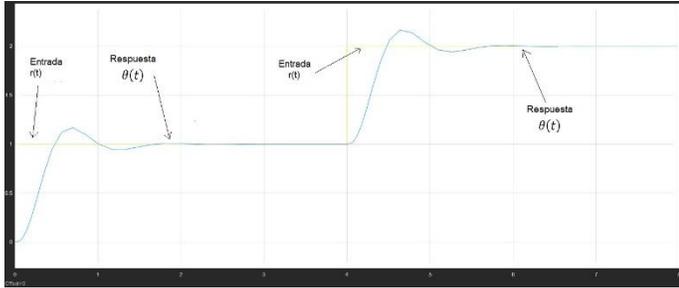


Figura 9: Gráfica de la respuesta del sistema al momento de cambiar la referencia del sistema compensado

La figura 9 muestra como la salida del motor de cd tiene una respuesta rápida (menor a 2 segundos) en la medida que varía la referencia del sistema, esto es, la salida sigue a la referencia. Por otro lado, el lugar geométrico de las raíces se modifica, obteniéndose una ganancia crítica de 1,124.5293. La figura 10 muestra el lugar geométrico de las raíces del sistema del motor de cd con compensador en adelante, como se puede apreciar el sistema cuenta con 1 cero y 4 polos, además amplía la ganancia crítica a 1,124.5293.

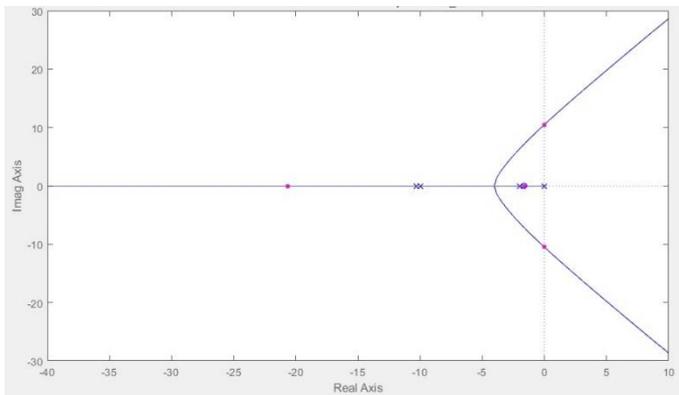


Figura 10: Lugar geométrico de las raíces del sistema compensado

CONCLUSIONES.

- **Motor de cd con controlador proporcional.**

El motor de cd controlado con un controlador proporcional alcanzaba el estado estacionario en un tiempo de 10 segundos aproximadamente, al momento de considerar una ganancia de 50, pero esto ocasionaba una oscilación máxima en la respuesta transitoria mayor al 50% de la referencia. Si la ganancia

seleccionada es menor a 50, las oscilaciones también son menores pero la respuesta transitoria es de mayor tiempo.

Al aplicar el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se obtuvo una ganancia crítica de 120.12, lo que significa que para ganancias mayores a esa cantidad el sistema se vuelve inestable.

- **Motor de cd con compensador en adelante.**

Al añadir el compensador en adelante al sistema retroalimentado del motor de cd se mejora por mucho la respuesta a una referencia constante (escalón). Al introducir una entrada escalón unitario, la respuesta del motor de cd alcanza dicha referencia en menos de 2 segundos, produciendo una oscilación menor al 20% por encima del valor de la entrada. Además, el lugar geométrico de las raíces se ve modificado debido a la acción del compensador, logrando con esto una ganancia crítica de 1,124.5293.

3. REFERENCIAS.

- [1] K. Ogata, Ingeniería de control moderna, Madrid, Pearson, 2010, pp. 493-502.
- [2] B.C. Kuo, Sistemas de control automático, México, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., 1996, pp. 171-180.
- [3] J. Dorsey, Sistemas de control continuos y discretos: modelado, identificación, diseño, implementación, México, McGraw Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V., 2005, pp. 292-296.
- [4] M.S. Álvarez, Modelo matemático de un motor de corriente continua separadamente excitado: Control de velocidad por corriente de armadura, Latin-American Journal of Physics Education, Vol. 6, No. 1, Marzo 2012, pp. 155-161.
- [5] S. Neira, Cálculo de características de motores de CD mediante instrumentación virtual, Ingenierías, Vol. X, No. 35, Abril-Junio 2007, pp. 20-25.
- [6] M.G. Quijano, "Obtención experimental de los parámetros del motor que se utilizará en el sistema de locomoción de una esfera rodante", Lic. Tesis, Escuela de Ingeniería y Administración, Facultad de Ingeniería Electrónica, Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga, 2009.
- [7] N. Thomas, P. Poongodi. (2009, Julio 1-3). "Position Control of DC Motor Using Genetic Algorithm Based PID Controller". [En línea]. Disponible en: http://iaeng.org/publication/WCE2009/WCE2009_pp1618-1622.pdf.
- [8] D.T. Liem, D.Q. Troung, K.K. Ahn. (2015, Enero 4). "A torque estimator using online tuning grey fuzzy PID for applications to torque-sensorless control of DC motors". [En línea]. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0957415815000136>
- [9] H.E.A. Ibrahim, F.N. Hassan, A.O. Shomer. (2013, Septiembre 13). "Optimal PID control of a brushless DC motor using PSO and BF techniques". [En línea]. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2090447913000993>.